Линейная алгебра

А.Я.Казаков Н.В.Аверина Е.Н.Дроздова Е.М.Кайнарова

1 Оглавление

2 Введение

Линейная алгебра - область математики, играющая исключительное значение при решении многих прикладных вопросов. Она во многом формирует сам язык, на котором формулируются многие задачи как фундаментальных, так и прикладных наук. Поэтому ее изучение составляет важнейшую часть естественно-научного образования. Целью этого пособия является сжатое изложение основных сюжетов этой области математики, достаточное для уверенного владения предметом. Изложение теоретических материалов сопровождается соответствующими задачами и разбором примеров. Основной текст пособия не включает доказательства теорем, разбор примеров, задачи, контрольные вопросы. Их можно открыть и ознакомиться с ними в отдельном окне, если у читателя возникнет такое желание. Те понятия и объекты, которые изучаются в линейной алгебре (матрицы, вектора, векторное пространство, базис, линейная независимость, собственные вектора и собственные значения и многое другое) входят в фундамент математического образования. Их использование, дальнейшее развитие и обобщение тесно связано с наиболее важными направлениями развития современной математики и прикладных наук. Здесь излагаются те разделы линейной алгебры, которые являются абсолютно необходимыми для инженера (в широком смысле этого слова). Дальнейшие главы линейной алгебры и различные приложения можно найти в нижеперечисленных книгах, которые приведены здесь в (примерном) порядке возрастания сложности.

Г.Е.Шилов. Математический анализ (конечномерные линейные пространства). М., 1962.

П. Ланкастер. Теория матриц. М., Наука 1973.

П. Халмош. Конечномерные линейные пространства. М., ФМ, 1963.

И.М.Гельфанд. Лекции по линейной алгебре. М., 1970.

В.С.Булдырев, Б.С. Павлов. Линейная алгебра и функции нескольких переменных. Л., ЛГУ, 1985.

А.И.Кострикин, Ю.И.Манин. Линейная алгебра и геометрия.

Имеется большое число задачников по линейной алгебре и связанным с ней вопросам. Упомянем здесь

Д.К.Фаддеев, И.С.Соминский. Сборник задач по высшей алгебре. М., Наука, 1968.

Л.А.Беклемишева, А.Ю.Петрович, И.А.Чубаров. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.

Сборник задач по алгебре, под ред. А.И.Кострикина. М., Физ.-математ. Литература, 2001.

3 Матрицы и действия с ними, определители

3.1 Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & A_{m3} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix},$$

имеющая m строк и n столбцов. В качестве чисел мы будем иметь в виду элементы вещественной оси $\mathbb{R}$. Числа A_{ik} называются **элементами** матрицы, число i при этом - номер строки, в которой стоит элемент, число k - номер столбца. Обычно матрица обрамляется парой круглых скобок, в отличие от других объектов (определители и т.д.), которые обрамляются другими видами скобок. Пара чисел (m, n) определяют **тип матрицы.** Иногда матрицу обозначают $\{A_{ik}\}_{1\leq i\leq m, 1\leq k\leq n}$, или еще короче $\{A_{ik}\}$, когда ясно, в каких пределах изменяются m и n. Если матрица имеет одну строку, ее называют матрица-строка, если матрица имеет один столбец - матрица столбец.

Виды матриц. Если $m = n$, матрица называется квадратной, число n при этом называют **порядком матрицы** . Квадратная матрица вида

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

называется диагональной и обозначается $A = diag\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\}$. Если матрица имеет структуру

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ 0 & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ 0 & 0 & A_{33} & \dots & A_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

она называется верхнетреугольной, если

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

ее называют нижнетреугольной.

Контрольный вопрос: чему равен A_{23}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}?$$

3.2 Определители

3.2.1 Определение

Для квадратной матрицы порядка n вводится важнейшая ее характеристика, называемая **определителем** (иногда употребляется название **детерминант**).Это число, которое по определенному довольно сложному правилу сопоставляется матрице. Для определителя матрицы $A = \{A_{ik}\}$ применяют следующие обозначения:

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & A_{n3} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix},$$

где прямые скобки отличают определитель от матрицы (при обозначении которой используют круглые скобки). В зависимости от удобства используется то или иное обозначение из приведенных выше. Число n при этом называют также и порядком определителя. Про числа $A_{11}, A_{22}, ..., A_{nn}$ говорят, что они стоят на **главной диагонали** матрицы (и, соответственно, определителя).

Мы будем определять понятие определителя матрицы последовательно по порядку n. Рассмотрим сначала матрицу порядка 1, которая содержит единственный элемент (есть 1 строка и 1 столбец!). Для такой матрицы определитель полагается равным значению ее элемента.

Для матрицы порядка 2,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

определитель задается соотношением

$$detA = |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix},$$

тогда ее определитель равен $detA = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = -2$.

Далее, рассмотрим матрицы порядка 3,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Выберем первую строку этой матрицы. Тогда полагают (выписывая формулу, следуя по этой строке):

$$detA = a_{11} \cdot \widetilde{A}_{11} + a_{12} \cdot \widetilde{A}_{12} + a_{13} \cdot \widetilde{A}_{13}, \tag{1}$$

где величины $\widetilde{A}_{ik}$, которые называются **алгебраическими дополнениями** элементов матрицы a_{ik}, определяются соотношениями

$$\widetilde{A}_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \widetilde{A}_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \widetilde{A}_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Правило вычисления $\widetilde{A}_{ik}$:

а) знаковый множитель определяется суммой номера строки и столбца $i + k$,

б) второй множитель получается так: в исходной матрице вычеркивается строка i и столбец k и вычисляется определитель оставшейся матрицы (в данном случае она порядка 2 и рецепт вычисления ее определителя см. выше).

Формулы (2) выписаны для случая, когда номер строки равен 1, однако аналогичным образом можно ввести $\widetilde{A}_{ik}$ для любых номеров строк.

Формула (1) называется **разложением определителя** по первой строке. Аналогичным образом можно написать разложение определителя по любой строке,

$$detA = a_{i1} \cdot \widetilde{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widetilde{A}_{i2} + a_{i3} \cdot \widetilde{A}_{i3}, \tag{3}$$

$i = 1, 2, 3$, и для любого столбца,

$$detA = a_{1k} \cdot \widetilde{A}_{1k} + a_{2k} \cdot \widetilde{A}_{2k} + a_{3k} \cdot \widetilde{A}_{3k}, \tag{4}$$

$k = 1, 2, 3$.

Утверждение 1. Значение определителя, которое получается в результате вычисления по формулам (3), (4), одно и то же (т.е. не зависит от выбора номера строки или столбца).

Таким образом, определение определителя порядка 3 завершено.

Теперь рассмотрим матрицу порядка $n = 4$. Для нее мы напишем формулу, аналогичную (3), которая, однако, будет включать 4 слагаемых,

$$detA = a_{i1} \cdot \widetilde{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widetilde{A}_{i2} + a_{i3} \cdot \widetilde{A}_{i3} + a_{i4} \cdot \widetilde{A}_{i4}, \tag{5}$$

или аналогичную (4), причем значения $\widetilde{A}_{ik}$ вычисляются по тому же правилу, что и ранее. При этом следует вычислять определители 3-го порядка (уже определенные выше). Справедлив аналог Утверждения 1.

Продолжая процедуру, мы можем определить значение определителя произвольного порядка через значения определителей меньшего порядка. Для произвольного порядка n справедливы формулы

$$detA = a_{i1} \cdot \widetilde{A}_{i1} + a_{i2} \cdot \widetilde{A}_{i2} + a_{i3} \cdot \widetilde{A}_{i3} + ... + a_{in} \cdot \widetilde{A}_{in}, \tag{6}$$

$i = 1, 2, 3, ..., n$,

$$detA = a_{1k} \cdot \widetilde{A}_{1k} + a_{2k} \cdot \widetilde{A}_{2k} + a_{3k} \cdot \widetilde{A}_{3k} + ... + a_{nk} \cdot \widetilde{A}_{nk}, \tag{7}$$

$k = 1, 2, ..., n$ (так что Утверждение 1 справедливо для любого порядка матрицы, если вместо (3) и (4) иметь в виду (6) и (7)). Величины $\widetilde{A}_{ik}$ вычисляются согласно приведенным выше правилам и являются, с точностью до знака, определителями порядка $n - 1$. Эти формулы называются соответственно разложением определителя по строке i или столбцу k.

Замечание. Удобно использовать для записи формул типа (7) обозначение суммирования

$$det(A) = \sum_{m=1}^{n} a_{mk} \cdot \widetilde{A}_{mk},$$

где под знаком суммирования указаны индекс суммирования (в данном случае m) и начальное значение (в данном случае $m = 1$). Это обозначение позволяет экономично записывать длинные формулы.

Замечание. Мы вводим определитель матрицы $n-$го порядка с помощью рекуррентной (последовательной по порядку n) процедуры. Существует и прямое определение этого понятия, требующее существенно более громоздкого рассмотрения. Если его использовать, соотношения (6), (7) становятся теоремами.

Пример. Вычислим определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Напишем его разложение по второму столбцу,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 7 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$2 \cdot (-1) \cdot (3 \cdot 3 - 4 \cdot 4) + 7 \cdot (1 \cdot 3 - 3 \cdot 4) + (-1) \cdot (-1) \cdot (1 \cdot 4 - 3 \cdot 3) =$$
$$-2 \cdot (-7) + 7 \cdot (-9) - 5 = -54.$$

Контрольный вопрос: вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

с помощью разложения по 3 столбцу.

3.2.2 Элементарные свойства определителей

С помощью приведенного выше определения можно вывести следующие свойства определителей.

1. Если у определителя переставить местами любые 2 строки, он изменит знак.

Следствие. Если у определителя есть 2 одинаковые строки, он равен нулю.

2. Если к строке определителя прибавить любую другую строку, умноженную на произвольное число, значение определителя не изменится.

Пример. Возьмем определитель

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Прибавим ко второй строке первую, умноженную на -3, к третьей - первую, умноженную на -4. Получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3+1\cdot(-3) & 7+2\cdot(-3) & 4+3\cdot(-3) \\ 4+1\cdot(-4) & -1+2\cdot(-4) & 3+3\cdot(-4) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -9 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$1\cdot(1\cdot(-9)-(-5)\cdot(-9)) = -54.$$

В последнем переходе мы использовали разложение по первому столбцу, в котором только один элемент отличен от нуля, и только он приводит к ненулевому слагаемому (нулевые мы не выписывали).

3. Если элементы строки обладают общим множителем, его можно вынести за знак определителя.

Пример. Возьмем определитель

$$D = \begin{vmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки обладают общим множителем 5. Выносим его за знак определителя, получаем:

$$D = 5\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot(-54) = -270.$$

4. Пусть i-ая строка определителя может быть представлена в виде суммы пары строк (не обязательно последние - строки определителя), $a_{ik} = b_{ik} + c_{ik}$, $k = 1, 2, ..., n$. Тогда имеет место равенство:

$$\begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix}$$

В этой формуле не указанные явно элементы совпадают, если стоят на одинаковых позициях.

5. Аналогичные свойства справедливы и при замене строк на столбцы.

6. Определитель верхнетреугольной матрицы равен произведению чисел, стоящих на главной диагонали. То же самое для нижнетреугольной матрицы.

Контрольное задание. Докажите приведенное выше следствие свойства 1.

Контрольное задание. Докажите свойство 6.

3.2.3 Вычисление определителей

Описанные выше свойства определителей позволяют быстро вычислять их значение (при не очень больших значениях n, обычно в пределах 3-4-5). Общая идея такова: с помощью вычитаний из строк других строк с подходящими множителями добиться того, чтобы в какой-то строке или столбце появилось много нулей. Тогда разложение определителя по этой строке даст малое число слагаемых. (Аналогичные манипуляции возможны и со столбцами). Именно такая техника была применена выше для вычисления определителя (8).

Пример. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку из второй, из третьей, из четвертой. Получим:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 8 & 15 \\ 0 & 7 & 26 & 63 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по первому столбцу, получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 8 & 15 \\ 7 & 26 & 63 \end{vmatrix}.$$

Вычтем первую строку 3 раза из второй и 7 раз из третьей, получаем:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 12 & 42 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая этот определитель по первому столбцу, находим:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 42 \end{vmatrix} = 84 - 72 = 12.$$

Иногда при вычислении определителя можно использовать его явную или скрытую симметрию.

Пример. Пусть

$$D = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Прибавим к первой строке все остальные. Получим:

$$D = \begin{vmatrix} 7 & 7 & 7 & 7 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Элементы первой строки имеют общий множитель 7. Выносим его, так что

$$D = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

Вычитаем теперь первую строку определителя из всех остальных. При этом

$$D = 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

В итоге пришли к вычислению определителя верхнетреугольной матрицы, так что $D = 7 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 189$.

Задачи.

Вычислить определители:

1.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

2.
$$A = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

3.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{vmatrix}$$

4.
$$A = \begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$$

5.
$$A = \begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$$

6.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

7.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

8.
$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$$

9.
$$A = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$$

3.3 Действия с матрицами

3.3.1 Сложение матриц

Сложение определено для матриц одного типа, т.е. для матриц, у которых число строк и столбцов совпадает. Сумма матриц $A = \{A_{ik}\}$ и $B = \{B_{ik}\}$, матрица $A + B$, определяется следующим образом: $(A + B)_{ik} = A_{ik} + B_{ik}$, $1 \le i \le m, 1 \le k \le n$. Иными словами: складываются элементы матриц A и B, стоящие на одинаковом месте (т.е. на пересечении одинаковых строк и столбцов) и записываются в то же место.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

3.3.2 Умножение матрицы на число

Пусть $A = \{a_{ik}\}$ - матрица типа (m, n), λ - произвольное число. Тогда матрица $\{\lambda a_{ik}\}$ называется произведением числа λ на матрицу A и обозначается $\lambda \cdot A$.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 7 & 5 & 2 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix},$$

тогда

$$5A = \begin{pmatrix} 5 & 20 & -5 \\ 35 & 25 & 10 \\ 15 & -30 & 35 \end{pmatrix}.$$

Контрольное задание. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить $3A - 2B$.

Замечание. Как и в обычной, в матричной арифметике знак умножения иногда не указывают, так что выражения $c \cdot A$ и cA равноправны.

3.3.3 Транспонирование матриц

Если для заданной матрицы A ее строки записать как столбцы, получим новую матрицу, которая называется **транспонированной** исходной, и обозначается A^T.

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 & 4 \\ 7 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & -6 & 7 & 8 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 4 & 5 & -6 \\ -1 & 2 & 7 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Подчеркнем, если матрица A имеет тип (m, n), то A^T имеет тип (n, m), так что эта операция, вообще говоря, меняет тип матрицы. В частности, если A была матрицей-столбцом, A^T будет матрицей-строкой той же длины. Поэтому из типографских соображений матрицу-столбец часто представляют в виде $(a_1, a_2, a_3, ..., a_n)^T$ (это выражение занимает меньше места).

3.3.4 Элементарные свойства операций с матрицами

Введенные операции обладают многими естественными арифметическими свойствами. Перечислим ряд из них.

1. Для любых матриц A, B, C одного типа $(A+B)+C = A+(B+C)$ (ассоциативность сложения).

2. Для любых матриц A, B одного типа $A + B = B + A$ (коммутативность сложения).

3. Пусть (m, n)-матрица O состоит из нулей. Такая матрица играет роль нуля при сложении матриц типа (m, n), $A + O = A$, $0 \cdot A = O$ для любой матрицы A того же типа.

4. Для любых чисел c_1, c_2 и любой матрицы A верно $(c_1 + c_2)A = c_1A + c_2A$.

5. Для любых матриц A, B одного типа и любого числа c верно $c(A + B) = cA + cB$.

6. Для любых чисел c_1, c_2 и любой матрицы A верно $(c_1c_2)A = c_1(c_2A)$.

7. Для любой матрицы A верно $1 \cdot A = A$.

8. Для любых матриц A, B одного типа $(A + B)^T = A^T + B^T$.

9. Для любого числа c и любой матрицы A верно: $(cA)^T = cA^T$.

10. Для любой квадратной матрицы $detA = detA^T$.

11. Для любой матрицы $(A^T)^T = A$.

3.3.5 Умножение матриц

Рассмотрим сначала умножение матрицы-строки на матрицу столбец. Пусть $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$, $B = (b_1, b_2, ..., b_n)^T$. Тогда

$$AB = a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n = \sum_{m=1}^{n} a_m b_m. \tag{9}$$

Для того, чтобы было определено умножение между A и B, необходимо, чтобы длина строки была равна длине столбца. Это условие называют условием согласования типов. Формулу (9) называют правилом умножения строчки на столбец.

Теперь обсудим общий случай. Пусть матрица A имеет тип (m, n), а матрица B имеет тип (n, p) (так что длина строки матрицы A совпадает с длиной столбца матрицы B). Тогда можно определить их произведение, матрицу C, следующим образом: матрица C будет иметь тип (m, p), причем для вычисления ее элемента C_{ik}, $1 \le i \le m, 1 \le k \le p$, следует взять строку с номером i матрицы A и умножить на столбец с номером k матрицы B,

$$c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + ... + a_{in}b_{nk} = \sum_{m=1}^{n} a_{im}b_{mk}.$$

Таким образом следует вычислить все mp элементов матрицы C. Еще раз подчеркнем, что ***для того, чтобы можно было перемножать матрицы A и B, их типы должны быть согласованы!***

Пример. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 3 & -6 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

В данном случае матрица A имеет тип (2,3), матрица B имеет тип (3,2), так что типы матриц согласнованы и в результате умножения A на B получим матрицу типа $(2,2)$. Получаем:

$$AB = \left(\begin{array}{cc} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3) & 1 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + (-1) \cdot 5 \\ 3 \cdot 2 + (-6) \cdot 1 + 7 \cdot (-3) & 3 \cdot 1 + (-6) \cdot 3 + 7 \cdot 5 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} 9 & 8 \\ -21 & 20 \end{array} \right).$$

Замечание. Для приведенных матриц произведение BA не определено - типы матриц B и A не согласованы. Это отражает общую ситуацию: результат произведения матриц ***зависит от порядка сомножителей*** (в отличие от обычной арифметики) - и даже может не существовать для одного выбора порядка сомножителей, существуя для другого.

3.3.6 Элементарные свойства операций с матрицами (продолжение)

Операция умножения матриц также обладает рядом естественных свойств. (Ниже считается, что типы матриц A, B согласованы, так что их можно перемножать).

1. $(cA)B = A(cB) = cAB$.
2. $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$.
3. $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.
4. $(AB)C = A(BC)$.
5. $(AB)^T = B^T A^T$.
6. Для квадратных матриц A, B одного типа $det(AB) = detA \cdot detB$.
7. Рассмотрим квадратную матрицу порядка n, $E = diag\{1, 1, 1, ..., 1\}$. Такая матрица играет выделенную роль в умножении матриц: для любых матриц A, B имеем $EA = A$, $BE = B$. Матрица E называется **единичной матрицей** порядка n. Согласно описанным выше результатам, $detE = 1$.

Задачи.

1. Умножить матрицы:

а)

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{array} \right).$$

б)

$$\left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

2. Вычислить

$$\left(\begin{array}{cc} 3 & 2 \\ -4 & -2 \end{array} \right)^5.$$

3. Вычислить $AB - BA$, если

а)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{ccc} 4 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right).$$

б)

$$A = \left(\begin{array}{ccc} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right), B = \left(\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{array} \right).$$

4. Вычислить

а) $f(A)$, если $f(x) = x^2 - 3x + 3$,

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

б) $f(A)$, если $f(x) = x^2 + 4x - 2$,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

5. Показать, что каждая матрица второго порядка

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + (ad - bc) = 0.$$

3.3.7 Обратная матрица

В рамках обычной арифметики обсуждается решение числового уравнения

$$ax = 1,$$

где a - заданное число. Если $a \neq 0$, это уравнение имеет единственное решение, которое обозначается $x = a^{-1}$ и называется обратным к a числом.

Пусть A - заданная квадратная матрица порядка n, можно рассмотреть матричное уравнение

$$AX = E. \tag{10}$$

Определение. Если $detA \neq 0$, матрица A называется **невырожденной**.

Определение. Решение уравнения (10) называется матрицей, обратной A.

Теорема. Для того, чтобы существовала обратная A матрица, небходимо и достаточно, чтобы матрица A была невырожденной.

Обратную матрицу обозначают A^{-1}.

Основные свойства обратной матрицы.

1.

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E.$$

2.

$$det(A^{-1}) = (detA)^{-1}.$$

3. Если квадратные матрицы порядка n A и B невырождены, то AB тоже невырождена, у нее существует обратная матрица, причем $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

4. Для невырожденной квадратной матрицы A верно: $(A^{-1})^{-1} = A$.

5. Для невырожденной квадратной матрицы A верно: $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Контрольный вопрос. Докажите эти свойства обратной матрицы.

Для вычисления элементов обратной матрицы существуют явные формулы.

Пусть A - квадратная невырожденная матрица порядка n. Вычислим матрицу D - матрицу алгебраических дополнений, согласно соотношениям

$$D_{ik} = (-1)^{i+k} det(\widetilde{A}_{ik}), 1 \leq i, k \leq n, \tag{11}$$

где $\widetilde{A}_{ik}$- матрица, которая получается из матрицы A после вычеркивания i-ой строки и k-того столбца. Тогда

$$A^{-1} = \frac{D^T}{detA}.$$

Пример. Пусть $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

$detA = ad - bc \neq 0$. Следуя (11), получаем:

$$D = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix},$$

так что

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Таким образом, для матрицы порядка 2 формулы для обратной матрицы достаточно простые. Для больших порядков формулы становятся существенно более громоздкими.

Задача. Найти обратную матрицу для матрицы

1.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.3.8 Матричные уравнения

Матричными уравнениями называются уравнения вида

$$AX = G, \tag{12}$$

$$XB = G, \tag{13}$$

$$AXB = G, \tag{14}$$

где матрицы A, B, G заданы и требуется построить матрицу X. Мы будем здесь считать, что матрицы A, B, G - квадратные одного порядка. Решение этих уравнений нетрудно построить, если матрицы A, B невырождены, так что существуют их обратные A^{-1}, B^{-1}. Умножая, например, уравнение (12) ***слева*** на матрицу A^{-1}, получаем:

$$A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X = A^{-1}G.$$

Умножая уравнение (13) ***справа*** на B^{-1}, получаем:

$$(XB)B^{-1} = X(BB^{-1}) = XE = X = GB^{-1}.$$

Аналогично, умножая (14) слева на A^{-1} и справа на B^{-1}, получим:

$$X = A^{-1}GB^{-1}.$$

Задачи.

1. Найти решение матричного уравнения (12), если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -9 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -26 & -50 \\ 27 & -15 \end{pmatrix}.$$

2. Найти решение матричного уравнения (12), если

$$A = \begin{pmatrix} 8 & -7 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 25 & -34 \\ -16 & 22 \end{pmatrix}.$$

3. Найти решение матричного уравнения (13), если

$$B = \begin{pmatrix} -8 & -5 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -20 & 30 \\ -19 & 20 \end{pmatrix}.$$

4. Найти решение матричного уравнения (13), если

$$B = \begin{pmatrix} 9 & 8 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} -72 & 23 \\ 0 & 58 \end{pmatrix}.$$

5. Найти решение матричного уравнения (14), если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 20 & -50 \\ 26 & 23 \end{pmatrix}.$$

6. Найти решение матричного уравнения (14), если

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 132 & 134 \\ 18 & 24 \end{pmatrix}.$$

3.4 Ранг матрицы

3.4.1 Определение ранга матрицы

Рассмотрим матрицу A типа (m, n). Пусть, для определенности, $m \leq n$. Возьмем m строк и выберем m столбцов матрицы A, на пересечении этих строк и столбцов получится квадратная матрица порядка m, определитель которой называют **минором порядка** m матрицы A. Если этот минор отличен от 0, его называют базисным минором и говорят, что ранг матрицы A равен m. Если же этот определитель равен 0, то выбирают другие m столбцов, на их пересечении стоят элементы, образующие другой минор порядка m. Если минор равен 0, продолжаем процедуру. Если среди всех возможных миноров порядка m нет отличных от нуля, мы выбираем $m - 1$ строк и столбцов из матрицы A, на их пересечении возникает квадратная матрица порядка $m - 1$, ее определитель называется минором порядка $m-1$ исходной матрицы. Продолжая процедуру, ищем ненулевой минор, перебирая все возможные миноры, понижая их порядок.

Определение. Ненулевой минор данной матрицы наивысшего порядка называется **базисным минором** исходной матрицы, его порядок называется **рангом** матрицы A, строки и столбцы, на пересечении которых находится базисный минор, называются базисныи строками и столбцами. Ранг матрицы обозначается $rang(A)$.

Из этого определения следуют простые свойства ранга матрицы: это целое число, причем ранг ненулевой матрицы удовлетворяет неравенствам: $1 \leq rang(A) \leq \min(m, n)$.

Контрольный вопрос. Как изменится ранг матрицы, если вычеркнуть какую-нибудь строку? Добавить какую-нибудь строку?

3.4.2 Линейная зависимость и линейная независимость столбцов матрицы

Пусть A - матрица типа (m, n). Рассмотрим столбцы матрицы A - это столбцы из m чисел каждый. Обозначим их $A_1, A_2, ..., A_n$. Пусть $c_1, c_2, ..., c_n$ - какие-то числа.

Определение. Столбец

$$D = c_1 A_1 + c_2 A_2 + ... + c_n A_n = \sum_{m=1}^{n} c_m A_m$$

называется линейной комбинацией столбцов $A_1, A_2, ..., A_n$, числа $c_1, c_2, ..., c_n$ называются коэффициентами этой линейной комбинации.

Определение. Пусть дано p столбцов $A_1, A_2, ..., A_p$. Если существуют такие числа $c_1, c_2, ..., c_p$, что

1. не все эти числа равны нулю,

2. линейная комбинация $c_1 A_1 + c_2 A_2 + ... + c_p A_p = \sum_{m=1}^{p} c_m A_m$ равна нулевому столбцу (т.е. столбцу, все элементы которого нули),

то говорят, что столбцы $A_1, A_2, ..., A_p$ линейно зависимы. Если для данного набора столбцов таких чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ не существует, столбцы называются линейно независимыми.

Пример . Рассмотрим 2-столбцы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

тогда для любых чисел c_1, c_2 имеем:

$$c_1 A_1 + c_2 A_2 = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Эта линейная комбинация равна нулевому столбцу тогда и только тогда, когда оба числа c_1, c_2 равны нулю. Таким образом, эти столбцы линейно независимы.

Утверждение. Для того, чтобы столбцы были линейно зависимы, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть столбцы $A_1, A_2, ..., A_m$ линейно зависимы, т.е. для некоторых констант $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, не все из которых равны 0, выполняется:

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_k A_k = 0$$

(в правой части - нулевой столбец). Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$. Тогда

$$A_1 = \sum_{k=2}^{m} c_k A_k, \quad c_k = -\lambda_k / \lambda_1, \tag{15}$$

т.е. первый столбец - линейная комбинация остальных. Наоборот,

3.4.3 Теорема о базисном миноре

Теорема. Для любой ненулевой матрицы A справедливо следующее:

1. Базисные столбцы линейно независимы.

2. Любой столбец матрицы является линейной комбинацией его базисных столбцов.

(Аналогичное верно и для строк).

Доказательство. Пусть, для определенности, (m, n) - тип матрицы A, $rang(A) = r \le n$ и базисный минор расположен в первых r строках и столбцах матрицы A. Пусть s - любое число между 1 и m, k - любое число между 1 и n. Рассмотрим минор следующего вида:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix},$$

т.е. мы к базисному минору приписали $s-$ый столбец и $k-$ую строку. По определению ранга матрицы этот определитель равен нулю (если мы выбрали $s \le r$ или $k \le r$, значит в этом миноре 2 одинаковых столбца или 2 одинаковых строки, если $s > r$ и $k > r$ - по определению ранга минор размера больше r обращается в ноль). Разложим этот определитель по последней строке, получим:

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + ... + a_{kr}A_{kr} + a_{ks}A_{ks} = 0. \qquad (16)$$

Здесь числа A_{kp} - алгебраические дополнения элементов из нижней строки D. Их величины ***не зависят*** от k, т.к. образуются с помощью элементов из первых r строк. При этом величина A_{ks} - это базисный минор, отличный от 0. Обозначим $A_{k1} = c_1, A_{k2} = c_2, ..., A_{ks} = c_s \ne 0$. Перепишем в новых обозначениях (16):

$$c_1 a_{k1} + c_2 a_{k2} + ... + c_r a_{kr} + c_s a_{ks} = 0,$$

или, разделив на c_s,

$$a_{ks} = \lambda_1 a_{k1} + \lambda_2 a_{k2} + ... + \lambda_r a_{kr}, \quad \lambda_p = -c_p/c_s.$$

Это равенство справедливо для любого значения k, так что

$$a_{1s} = \lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{12} + ... + \lambda_r a_{1r},$$

$$a_{2s} = \lambda_1 a_{21} + \lambda_2 a_{22} + ... + \lambda_r a_{2r},$$

....

$$a_{ms} = \lambda_1 a_{m1} + \lambda_2 a_{m2} + ... + \lambda_r a_{mr}.$$

Итак, $s-$ый столбец является линейной комбинацией первых r столбцов. Теорема доказана.

Замечание. Из теоремы о базисном миноре следует, что ранг матрицы равен числу ее линейно независимых столбцов (которое равно числу линейно независимых строк).

Следствие 1. Если определитель равен нулю, то у него есть столбец, который является линейной комбинацией остальных столбцов.

Следствие 2. Если ранг матрицы меньше числа столбцов, то столбцы матрицы линейно зависимы.

3.4.4 Вычисление ранга матрицы и нахождение базисного минора

Некоторые преобразования матрицы не меняют ее ранг. Такие преобразования можно назвать элементарными. Соответствующие факты нетрудно проверить с помощью свойств определителей и определения ранга матрицы.

1. Перестановка столбцов.

2. Умножение элементов какого-нибудь столбца на ненулевой множитель.

3. Прибавление к столбцу любого другого столбца, умноженного на произвольное число.

4. Вычеркивание нулевого столбца.

Аналогичное верно и для строк.

С помощью этих преобразований матрицу можно преобразовать к так называемой "трапециевидной"форме - матрице, под главной диагональю которой располагаются только нули. Для "трапециевидной"матрицы ранг - это число ненулевых элементов на главной диагонали, и базисный минор - минор, диагональ которого совпадает с набором ненулевых элементов на главной диагонали преобразованной матрицы.

Пример. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

Будем преобразовывать ее с помощью указанных выше преобразований.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 12 & 16 \\ 0 & -1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Здесь мы последовательно делаем следующие шаги: 1) переставляем вторую строку наверх, 2) вычитаем первую строку из остальных с подходящим множителем, 3) вычитаем вторую строку из третьей 4 раза, прибавляем вторую строку к четвертой, 4) вычеркиваем нулевые строки - третью и четвертую. Наша итоговая матрица прибрела желаемую форму: на главной диагонали стоят ненулевые числа, под главной диагональю - нули. После этого процедура останавливается и число ненулевых элементов на главной диагонали равно рангу матрицы. Базисный минор при этом - две первые строки и два первых столбца. На их пересечении стоит матрица порядка 2 с ненулевым определителем. При этом, возвращаясь по цепочке преобразований в обратную сторону, можно проследить, откуда возникла та или иная строка (тот или иной столбец) в конечной матрице, т.е. определить базисные строки и столбцы в исходной матрице. В данном случае первые две строки и первые два столбца образуют базисный минор.

Контрольный вопрос. Пусть A - матрица типа (m, n) ранга r_1, B - матрица типа (p, n) ранга r_2. Объединим их строки - получим матрицу C. Можно ли дать двустороннюю оценку ранга матрицы C?

Задачи.

1. Вычислить ранг матрицы
а)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

б)

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

в)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -1 & 5 & -6 \end{pmatrix}.$$

г)

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Доказать равенство $rang(A) = rang(A^T)$.
3. Пусть A и B - матрицы с одинаковым числом строк. Доказать, что

$$rang \begin{pmatrix} A & B \\ 2A & 3B \end{pmatrix} = rang(A) + rang(B).$$

4 Системы линейных алгебраических уравнений

При решении систем линейных уравнений обсуждаются 3 вопроса: а) существует ли решение системы уравнений, б) сколько разных решений имеет система уравнений, в) алгоритм решения. Ниже излагаются основные результаты в этой области математики, позволяющие исчерпывающим образом ответить на эти вопросы.

4.1 Теорема Крамера

4.1.1 Система двух уравнений, два неизвестных

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \tag{17}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \tag{18}$$

числа $a_{ik}, b_i,\ i, k = 1, 2$ считаются заданными, требуется найти неизвестные x_1, x_2 . Эту систему можно решить исключением неизвестных. Например, умножим первое уравнение на a_{22} и вычтем второе, умноженное на a_{12}, получим:

$$(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})x_1 = b_1a_{22} - b_2a_{12},$$

так что если $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0$,

$$x_1 = \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{19}$$

Если второе уравнение умножить на a_{11} и вычесть из него первое уравнение, умноженное на a_{21}, получим:

$$x_2 = \frac{a_{11} b_2 - a_{21} b_1}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}. \tag{20}$$

Введем следующие обозначения. Матрицей коэффициентов системы уравнений (17)-(18) назовем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

столбец правых частей системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}.$$

Тогда формулы (19), (20) можно переписать следующим образом:

$$x_1 = \frac{detC_1}{detA}, x_2 = \frac{detC_2}{detA}, \tag{21}$$

где матрица C_k, $k = 1, 2$, получается из матрицы A заменой ее k-того столбца на столбец B. Формулы (21) называются формулами Крамера для системы из 2 уравнений с двумя неизвестными. Они описывают единственное решение системы уравнений в данном случае.

4.1.2 Система n уравнений, n неизвестных

Рассмотрим систему n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \tag{22}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2, \tag{23}$$

$$..$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \tag{24}$$

Матрицей коэффициентов системы уравнений назовем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

образуем столбец правых частей системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}^T.$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема Крамера. Пусть $detA \neq 0$. Тогда система уравнений (22)-(24) имеет единственное решение, которое описывается формулами:

$$x_k = \frac{detC_k}{detA}, k = 1, 2, ..., n, \tag{25}$$

где матрица C_k получается из матрицы A заменой ее $k-$го столбца столбцом B.

Соотношения (25) называются правилом Крамера.

4.1.3 Решение системы уравнений с помощью обратной матрицы

В том случае, когда матрица коэффициентов системы уравнений невырождена, для построения решений системы можно использовать обратную матрицу. Уравнения (22)-(24) можно записать в более экономичном виде

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m = b_k, k = 1, 2, ..., n. \tag{26}$$

Далее, введем столбец неизвестных $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$, тогда в левой части соотношения (26) можно опознать матричное умножение, так что систему уравнений (26) можно записать в наших матричных терминах в виде матричного уравнения,

$$AX = B, \tag{27}$$

решение которого уже описано ранее в терминах обратной матрицы:

$$X = A^{-1}B.$$

Задачи. Решить системы методом Крамера и методом обратной матрицы.

а)

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = -1,$$
$$2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4,$$
$$4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2.$$

б)

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5,$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1,$$
$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11.$$

в)

$$2x_1 + x_2 - x_3 = 2,$$
$$3x_1 + x_2 - 2x_3 = 3,$$
$$x_1 + x_3 = 3.$$

В целом решение систем методом Крамера и методом обратной матрицы требует выполнения 2 условий: матрица коэффициентов системы должна быть квадратной (т.е. число уравнений должно совпадать с числом неизвестных) и эта матрица должна быть невырожденной. К тому же практическая реализация этих методов связана с весьма громоздкими вычислениями, так что они имеют лишь теоретическое значение. На практике используют существенно более простой в реализации метод Гаусса, который к тому же позволяет решать и более общие системы уравнений. Этот метод описан ниже.

4.2 Системы линейных уравнений общего вида

4.2.1 Общие определения

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \tag{28}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2, \tag{29}$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \tag{30}$$

Матрицей коэффициентов системы уравнений назовем матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

образуем столбец правых частей системы

$$B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m \end{pmatrix}^T.$$

Определение. Решением системы уравнений (28)-(31) называют такой набор чисел $x_1, x_2, ..., x_n$, который при подстановке в уравнения обращает все эти уравнения в равенства.

Определение. Система уравнений (28)-(31) называется **однородной**, если столбец правых частей нулевой. Если столбец B ненулевой, система называется **неоднородной**.

Вообще говоря, система уравнений (28)-(31) может не иметь решений.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 1,$$

$$x_1 + x_2 = 2.$$

Очевидно, что она не имеет решений.

Далее, система линейных уравнений может иметь бесконечно много решений.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 0.$$

Очевидно, что эта система из одного уравнения для двух неизвестных имеет бесконечно много решений.

Кроме того, как следует из теоремы Крамера, система уравнений может иметь единственное решение. Таким образом, следует развить теорию, позволяющую выяснить в общих терминах, когда система несовместна, когда она имеет решение и сколько решений она имеет, и представить аппарат, позволяющий построить эти решения.

4.2.2 Метод Гаусса

Метод Гаусса позволяет в рамках единого подхода построить решения произвольной системы линейных алгебраических уравнений. Исходным является построение расширенной матрицы, которая получается так: к матрице коэффициентов системы A добавляют справа столбец правых частей B. При этом имеется естественное взаимно-однозначное соответствие: каждой строке расширенной матрицы отвечает уравнение системы.

Метод Гаусса опирается на следующие простые соображения: существуют преобразования системы уравнений, которые не меняют набора решений системы. Перечислим эти преобразования с указанием того, как они влияют на расширенную матрицу.

1. Перестановка уравнений (перестановка строк расширенной матрицы).

2. Умножение уравнения на ненулевое число (умножение строки расширенной матрицы на ненулевое число).

3. Вычитание из одного уравнения другого, умноженного на произвольное число (вычитание из строки расширенной матрицы другой строки, умноженной на произвольное число).

4. Перестановка двух неизвестных (с учетом необходимости обратной замены переменных) (перестановка столбцов расширенной матрицы).

Опишем теперь процедуру решения системы линейных уравнений с помощью метода Гаусса. Она включает 2 шага: прямой и обратный.

1. **Прямой ход метода Гаусса**. Выпишем расширенную матрицу системы уравнений,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

и найдем среди чисел a_{ik} число, отличное от 0. Перестановкой строк и столбцов переместим это число в позицию $(1,1)$,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Затем из второй, третьей и последующих строк вычитаем первую с подходящим множителем, так, чтобы под числом $a^{(1)}$ появились нулевые элементы,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Затем в части матрицы, не включающей первую строку и последний столбец, вновь ищем ненулевой элемент $a^{(2)}$ и, переставляя строки и столбцы, помещаем его на позицию $(2,2)$,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Вычитая вторую строку из всех последующих с подходящими множителями, получаем 0 во всех элементах, стоящих под $a^{(2)}$,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Затем в части матрицы, не включающей первую и вторую строки и последний столбец, вновь ищем ненулевой элемент $a^{(3)}$ и, переставляя строки и столбцы, помещаем его на позицию $(3,3)$ и т.д. Продолжая нашу процедуру, мы преобразуем исходную матрицу к матрице, имеющей "трапециевидную"форму: на главной диагонали у такой матрицы стоят ненулевые элементы, а под главной диагональю - нули. Наша процедура остановится, когда 1) мы дойдем до "дна"матрицы, или 2) будет невозможно найти ненулевой элемент среди оставшихся строк, т.е. оставшиеся строки содержат только нули (за возможным исключением последнего столбца!). На этом прямой ход метода Гаусса заканчивается. Его результатом является преобразованная матрица.

2. **Обратный ход метода Гаусса**. Рассмотрим внимательно построенную на предыдущем шаге матрицу. Как отмечалось выше, каждая строка построенной матрицы представляет уравнение, которое однозначно по ней восстанавливается. Таким образом, следует решить систему уравнений, соответствующую матрице, построенной в результате прямого хода метода Гаусса. Возможны следующие ситуации.

а) Она содержит строки, состоящие из нулей, за исключением элементов последнего столбца, которые не равны нулю,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} a^{(1)} & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a^{(2)} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b^* \end{pmatrix},$$

$b^* \neq 0$. Как упоминалось выше, каждая такая строка матрицы соответствует уравнению, в данном случае - уравнению с нулевыми коэффициентами, в правой части которого стоит не ноль. Таким образом, в этом случае исходная система уравнений несовместна.

б) Итоговая матрица содержит полностью нулевые строки. Такие строки соответствуют тривиальному уравнению $0 = 0$, их можно вычеркнуть. Далее, r, число ненулевых элементов на главной диагонали равно рангу матрицы коэффициентов исходной системы уравнений. При этом возможны 2 ситуации:

б1) $r = n$ - ранг матрицы равен числу неизвестных. Это ситуация теоремы Крамера, когда существует только одно решение системы уравнений. По построенной матрице восстанавливают систему уравнений, которую решают ***снизу вверх***. При этом на каждом шаге уравнение тривиально.

б2) $r < n$. В этом случае следует неизвестные с номерами, большими r, положить равными произвольным константам (т.е. написать равенства $x_{r+1} = \alpha, x_{r+2} = \beta, ..., x_n = \gamma$, причем $\alpha, \beta, ..., \gamma$ могут принимать произвольные значения), подставить эти значения в построенную систему уравнений и решать эти уравнения ***снизу вверх***. При этом мы получим набор решений, зависящий от $n - r$ свободных параметров - $\alpha, \beta, ..., \gamma$.

Пример. Рассмотрим систему уравнений

$$x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4,$$

$$x_2 - x_3 + x_4 = -3,$$
$$x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1,$$
$$-7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3.$$

Этой системе уравнений соответствует расширенная матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Начинаем преобразовывать матрицу. В данном случае в позиции $(1,1)$ стоит 1, так что на первом шаге перестановку строк и столбцов можно не реализовывать. Вычитаем первую строку из третьей, так что

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

И опять, в позиции $(2,2)$ стоит 1, так что и на втором шаге перестановка строк и столбцов не требуется. Вычитаем вторую строку из третьей 5 раз, прибавляем вторую строку к четвертой 7 раз,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 12 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & -24 \end{pmatrix}.$$

Третью строку можно сократить на 2, четвертую - на (-4),

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

В позиции $(3,3)$ стоит 1, так что перестановка строк и столбцов на третьем шаге не нужна. Вычитаем третью строку из четвертой,

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Последняя строка содержит только нули, что соответствует тривиальному уравнению $0 = 0$. Вычеркивая ее, прибываем к окончательному виду преобразованной расширенной матрицы:

$$A \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует 3 уравнениям. Ранг матрицы равен $r = 3$ (число ненулевых элементов на главной диагонали), система уравнений имеет 4 неизвестных. Согласно схеме метода Гаусса, полагаем: $x_4 = \alpha$, и начинаем решать систему уравнений снизу вверх. Третье (нижнее!) уравнение нам дает:

$$x_3 = 2\alpha + 6.$$

Подставляем во второе уравнение:

$$x_2 - (2\alpha + 6) + \alpha = -3,$$

так что

$$x_2 = \alpha + 3.$$

Подставляя в первое уравнение, получаем:

$$x_1 - 2(\alpha + 3) + 3(2\alpha + 6) - 4\alpha = 4.$$

В итоге

$$x_1 = -8.$$

Выпишем ответ целиком:

$$x_1 = -8, x_2 = \alpha + 3, x_3 = 2\alpha + 6, x_4 = \alpha.$$

4.2.3 Однородные системы уравнений

Напомним, что система линейных уравнений называется однородной, если в правых частях всех уравнений стоят нули. Таким образом, мы обсуждаем систему уравнений

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \tag{31}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0, \tag{32}$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0. \tag{33}$$

С использованием экономичных обозначений эту систему можно переписать в виде

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km}x_m = 0, k = 1, 2, ..., n. \tag{34}$$

Очевидно, что у этой системы имеется решение $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, это решение называется **тривиальным**. Центральный вопрос, который обсуждается в данном параграфе: есть ли у системы уравнений (31)-(33) **нетривиальные** решения?

Теорема. Для того, чтобы система линейных однородных уравнений имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы коэффициентов системы был меньше числа неизвестных.

Для того, чтобы сформулировать окончательный результат, нам потребуется ввести новые понятия. Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ - решение системы (31)-(33). Образуем столбец решений $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$.

Предложение. Пусть столбцы $X_1, X_2, ..., X_k$ представляют собой столбцы решений системы (31)-(33). Тогда любая линейная комбинация этих столбцов представляет собой столбец решений системы (31)-(33).

Теорема. Пусть $r = rang(A) < n$, числа неизвестных системы (31)-(33). Тогда

1. Имеется $(n - r)$ линейно независимых столбцов, представляющих собой столбцы решений системы,

2. Любой другой столбец, представляющий собой столбец решений системы, является линейной комбинацией этих линейно независимых столбцов.

Утверждение этой теоремы можно выразить с помощью одной формулы. Пусть $X_1, X_2, ..., X_{n-r}$, - те линейно независимые столбцы-решения, существование которых утверждается в теореме. Тогда любой другой столбец-решение имеет вид:

$$X = \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k X_k, \tag{35}$$

т.е. является их линейной комбинацией. Такой столбец-решение называется **общим решением** системы (31)-(33) (имея в виду, что константы $\lambda_k, k = 1, 2, ..., (n - r)$, могут принимать любое значение. Соотношение (35) описывает структуру общего решения однородной системы уравнений. Столбцы-решения X_k называются **фундаментальными решениями** системы (31)-(33).

Задачи. Решить системы уравнений и построить фундаментальные решения.

а)

$$-6x_1 + 3x_2 + 18x_4 = 0,$$
$$5x_1 - 7x_2 + 9x_3 - 24x_4 = 0,$$
$$27x_1 - 27x_2 + 27x_3 - 108x_4 = 0.$$

б)

$$x_1 - x_2 - 3x_4 = 0,$$
$$-6x_1 + 7x_2 - 2x_3 + 20x_4 = 0,$$
$$-9x_1 + 11x_2 - 4x_3 + 31x_4 = 0.$$

в)

$$-x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 4x_4 = 0,$$
$$-x_1 - 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0,$$
$$-5x_1 - 8x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0.$$

г)

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0,$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0,$$
$$x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 10x_4 = 0,$$
$$x_1 + 4x_2 + 10x_3 + 20x_4 = 0.$$

4.2.4 Неоднородные системы уравнений

Обсудим теперь неоднородную систему уравнений, в правых частях которых не все числа равны нулю,

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \tag{36}$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_2, \tag{37}$$

$$...$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \tag{38}$$

или, в более кратком виде,

$$\sum_{p=1}^{n} a_{kp}x_p = b_k, k = 1, 2, ..., m.$$

С этой системой уравнений можно связать 2 матрицы: матрицу коэффициентов A и расширенную матрицу $\widetilde{A}$, которая получается из A приписыванием справа столбца правых частей B.

Теорема Кронекера-Капелли. Для того, чтобы неоднородная система линейных уравнений (36)-(38) имела хотя бы одно решение, небходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$rang(A) = rang(\widetilde{A}). \tag{39}$$

Пусть X_c - решение-столбец системы (38) и X - произвольное другое решение этой системы уравнений. Как отмечалось выше, систему уравнений (36)-(38) можно записать в виде матричного уравнения, так что тот факт, что X_c и X - решения-столбцы, можно выразить соотношениями:

$$AX = B, AX_c = B.$$

Вычитая одно из другого и используя элементарные свойства матричных операций, получаем:

$$A(X - X_c) = 0,$$

где справа стоит нулевой столбец. Таким образом, столбец $X - X_c$ является решением однородной системы уравнений. Выше описано общее решение однородной системы уравнений. Используя это описание, мы получаем описание общего решения неоднородной системы уравнений:

$$X = X_c + \sum_{k=1}^{n-r} \lambda_k X_k, \tag{40}$$

где X_c - какое-то решение неоднородной системы уравнений, а X_k, $k = 1, 2, ..., (n - r)$ - фундаментальные решения соответствующей (т.е. с теми же коэффициентами) однородной системы уравнений.

Задачи.

Решить системы уравнений методом Гаусса.

а)

$$-7x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 50,$$

$$-4x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 10,$$

$$6x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 0.$$

б)

$$-7x_1 - 6x_2 + 19x_3 = -34,$$

$$-2x_1 - 2x_2 + 6x_3 = -10,$$

$$-23x_1 - 20x_2 + 63x_3 = 112.$$

в)

$$5x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 30,$$

$$-5x_1 + 5x_2 - 25x_3 = 25,$$

$$20x_1 - 9x_2 + 78x_3 = -45.$$

г)

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4,$$
$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1,$$
$$3x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6.$$

д)

$$2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1,$$
$$2x_1 - x_2 - 3x_4 = 2,$$
$$3x_1 - x_3 + x_4 = -3,$$
$$2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = -6.$$

5 Векторные / линейные пространства

В данном разделе обсуждается понятие векторного (иногда его называют линейным) пространства. Этот объект является ключевым для развития общих структур линейной алгебры.

5.1 Основные определения

Определение. Множество $\mathfrak{L}$ называется **векторным пространством**, а его элементы $u \in \mathfrak{L}$ - **векторами**, если для его элементов заданы 2 операции: сложение элементов (обозначается знаком $+$) и умножение элемента на вещественные числа $c \in \mathbb{R}$, так что справедливы следующие соотношения, которые выполняются для всех элементов $u, u_k \in \mathfrak{L}$ и любых чисел $c, c_m \in \mathbb{R}$:

1. $u_1 + u_2 = u_2 + u_1$,
2. $u_1 + (u_2 + u_3) = (u_1 + u_2) + u_3$,
3. $c(u_1 + u_2) = cu_1 + cu_2$,
4. $c_1(c_2 u) = (c_1 c_2)u$,
5. $1 \cdot u = u$
6. Существует нулевой элемент $0 \in \mathfrak{L}$ такой, что $0 + u = u, 0 \cdot u = 0, c \cdot 0 = 0$.

Пример. Рассмотрим множество $n-$столбцов. Это частный случай матриц, так что в качестве операций мы используем матричные операции сложения и умножения на число. Можно проверить, что выполняются все описанные выше свойства операций, если в качестве нулевого элемента взять нулевой столбец - столбец, все элементы которого равны 0.

Пример. Рассмотрим множество матриц типа (m, n). В качестве операций мы используем матричные операции сложения и умножения на число. Можно проверить, что выполняются все описанные выше свойства операций, если в качестве нулевого элемента взять нулевую матрицу - матрицу типа (m, n), все элементы которой равны 0.

Пример. Рассмотрим множество полиномов степени n переменной x, т.е. множество функций вида

$$P(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n \cdot x^n$$

(числа $a_k, k = 1, 2, ..., n$ называются коэффициентами полинома $P(x)$). На этом множестве можно ввести естественные операции сложения и умножения на число, так что это множество является векторным пространством. Нулевым элементом является полином с нулевыми коэффициентами.

5.2 Линейная зависимость и независимость

Определение. Пусть $u_1, u_2, ..., u_m \in \mathfrak{L}$, числа $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{R}$. Тогда вектор

$$u = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k$$

называется **линейной комбинацией** векторов $u_1, u_2, ..., u_m$, а числа $c_1, c_2, ..., c_m$ - коэффициентами этой линейной комбинации.

Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство 2-столбцов, $u_1 = (1,0)^T, u_2 = (0,1)^T$, тогда их линейная комбинация с коэффициентами c_1, c_2 соответственно равна $u = c_1u_1 + c_2u_2 = c_1(1,0)^T + c_2(0,1)^T = (c_1, c_2)^T$.

Определение. Пусть для заданного набора векторов $u_1, u_2, ..., u_m \in \mathfrak{L}$ существуют числа $c_1, c_2, ..., c_m \in \mathbb{R}$ такие, что не все они равны нулю, а линейная комбинация

$$\sum_{k=1}^{m} c_k u_k = 0$$

(справа стоит нулевой вектор!) Тогда вектора $u_1, u_2, ..., u_m$ называются **линейно зависимыми**. Если чисел $c_1, c_2, ..., c_m$ с такими свойствами не существует, вектора $u_1, u_2, ..., u_m$ называются **линейно независимыми**.

Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство полиномов степени 2, рассмотрим следующий набор функций: $p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = 1 + 2x^2$. Проверим, что эти функции линейно независимы. Составим для этого их линейную комбинацию $\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x) = \alpha_3 + x \cdot (\alpha_1 + \alpha_2) + x^2 \cdot (\alpha_2 + 2\alpha_3)$. Если этот полином равняется нулевому элементу, то $\alpha_3 = 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0$. Из этих равенств следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, что означает линейную независимость функций $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$.

Утверждение. Для того, чтобы вектора $u_1, u_2, ..., u_m \in \mathfrak{L}$ были линейно зависимыми, необходимо и достаточно, чтобы один из них был линейной комбинацией остальных.

Контрольный вопрос. Докажите это утверждение.

5.3 Базис и размерность векторного пространства

Определение. Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ существует набор векторов $e_1, e_2, ..., e_n$ со следующими свойствами:

1. Они линейно независимы,
2. Любой другой вектор из $\mathfrak{L}$ является их линейной комбинацией.

Тогда говорят, что вектора $e_1, e_2, ..., e_n$ образуют **базис** пространства $\mathfrak{L}$, а число n называют **размерностью** $\mathfrak{L}$.

Размерность векторного пространства $\mathfrak{L}$ обозначается $dim\mathfrak{L}$.

В одном и том же векторном пространстве можно ввести разные базисы.

Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство 2-столбцов. Положим $e_1 = (1,0)^T, e_2 = (0,1)^T$, $f_1 = (1,1)^T, f_2 = (1,-1)^T$. Нетрудно показать, что эти вектора в каждой паре - линейно независимы. Любой вектор $u = (\xi_1, \xi_2)^T$ можно представить в виде линейной комбинации векторов этих пар: $u = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2) f_1 + \frac{1}{2}(\xi_1 - \xi_2) f_2$.

Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство полиномов степени 2, рассмотрим следующий набор функций: $p_1(x) = x, \quad p_2(x) = x + x^2, \quad p_3(x) = 1 + 2x^2$. Покажем, что эти полиномы составляют базис векторного пространства. Их линейная независимость обсуждалась выше. Далее, покажем, что любой элемент $f(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 \in \mathfrak{L}$ может быть представлен в виде линейной комбинации $\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x) + \alpha_3 p_3(x)$ для подходящих $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Подставляя выражения для функций $p_1(x), p_2(x), p_3(x)$ и приравнивая коэффициенты при различных степенях x, получаем три уравнения: $\alpha_3 = c_1, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = c_2, \quad \alpha_2 + 2\alpha_3 = c_3$. Нетрудно проверить, что эти уравнения имеют единственное решение $\alpha_3 = c_1, \quad \alpha_2 = c_3 - 2c_1, \alpha_1 = c_2 + 2c_1 - c_3$.

Возьмем произвольный вектор $u \in \mathfrak{L}$. Тогда существует представление этого вектора в виде линейной комбинации векторов базиса,

$$u = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k.$$

Определение. Числа ξ_k, $k = 1, 2, ..., n$, называются **координатами** вектора u в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$.

Утверждение. Координаты вектора в данном базисе определяются однозначно.

Контрольный вопрос. Докажите это утверждение.

Пример. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство n-столбцов. Положим $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0)^T, e_2 = (0, 1, 0, ..., 0)^T, ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)^T$. Тогда любой столбец $u = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T = \sum_{k=1}^{n} \xi_k e_k$, так что числа ξ_k представляют собой координаты вектора u в данном базисе.

Довольно часто в приложениях возникает задача о проверке того, является ли данный набор векторов линейно независимым, составляют ли они базис в данном пространстве, или задача о выделении в данном наборе векторов такой совокупности, которая образует базис. Все эти задачи можно решить с помощью теоремы о базисном миноре. А именно, обычно вектора представляются в виде разложения по некоторому базису, так что можно их представить в виде строк. Составим из строк матрицу, найдем ее ранг и базисный минор. Ранг в данном случае будет равен числу линейно независимых векторов в нашем наборе, а строки базисного минора соответствуют искомым линейно независимым векторам. Если ранг матрицы будет равен размерности исходного пространства, то найденные линейно независимые вектора составляют его базис.

Задачи.

1. Выясните, являются ли линейно независимыми следующие вектора:

$$a_1 = (2, -3, 1), \quad a_2 = (3, -1, 5), \quad a_3 = (1, 3, 2).$$

2. Выясните, являются ли линейно независимыми следующие вектора:

$$a_1 = (1, 0, 0, 2, 5), \quad a_2 = (0, 1, 0, 3, 4), \quad a_3 = (0, 0, 1, 4, 7), \quad a_4 = (2, -3, 4, 11, 12).$$

3. Пусть даны линейно независимые вектора $v_1, v_2, ..., v_n$. Являются ли линейно независимыми вектора $v_1 - v_2, v_2 - v_3, ..., v_{n-1} - v_n, v_n$?

4. Найти все значения параметра λ, при котором вектор b является линейной комбинацией векторов a_1, a_2, a_3.

$$a_1 = (3, 2, 5), a_2 = (2, 4, 7), a_3 = (5, 6, 7), b = (1, 3, 5).$$

5. Пусть $dim\mathfrak{L} = n < m$. Доказать, что любой набор m векторов является линейно зависимым.

6. Даны вектора $a_1 = (3, -2), \quad a_2 = (-2, 1), \quad c = (7, -4)$. Разложить вектор c по базису векторов a_1, a_2.

7. Даны вектора $a_1 = (3, -2, 1), \quad a_2 = (-1, 1, -2), \quad a_3 = (2, 1, -3), \quad c = (11, -6, 5)$. Разложить вектор c по базису векторов a_1, a_2, a_3.

5.4 Замена базиса

Как упоминалось выше, базис в данном векторном пространстве можно ввести разными способами. В связи с этим возникает естественная задача: описать связь между базисами.

Задача. Докажите, что размерность векторного пространства не зависит от выбора базиса (т.е. что любой базис содержит одинаковое число векторов).

Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ заданы базисы $e_1, e_2, ..., e_n$ и $f_1, f_2, ..., f_n$. Любой вектор второго базиса можно выразить через вектора первого базиса, так что

$$f_1 = c_{11}e_1 + c_{21}e_2 + ... + c_{n1}e_n, \tag{41}$$

$$f_2 = c_{12}e_1 + c_{22}e_2 + ... + c_{n2}e_n, \tag{42}$$

....

$$f_n = c_{1n}e_1 + c_{2n}e_2 + ... + c_{nn}e_n, \tag{43}$$

или

$$f_k = \sum_{m=1}^{n} c_{mk}e_m, k = 1, 2, ..., n. \tag{44}$$

Определение. Матрица

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & c_{31} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & c_{32} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix},$$

элементы которой введены согласно соотношениям (41)-(43), называется **матрицей замены базиса** $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ на базис $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$.

Аналогичным образом можно выразить вектора базиса e через вектора базиса f:

$$e_1 = b_{11}f_1 + b_{21}f_2 + ... + b_{n1}f_n, \tag{45}$$

$$e_2 = b_{12}f_1 + b_{22}f_2 + ... + b_{n2}f_n, \tag{46}$$

....

$$e_n = b_{1n}f_1 + b_{2n}f_2 + ... + b_{nn}f_n, \tag{47}$$

или

$$e_s = \sum_{k=1}^{n} b_{ks}f_k, s = 1, 2, ..., n.$$

Соответственно, возникает матрица B:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & b_{31} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} & \dots & b_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{1n} & b_{2n} & b_{3n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

Теорема. Матрица перехода от базиса к базису невырождена.

Доказательство. Подставляя (41)-(43) в (45)-(47), получаем:

$$e_s = \sum_{k=1}^{n} b_{ks} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{mk}e_m \right).$$

В последнем выражении стоят 2 ***конечные*** суммы. Для конечных сумм, согласно правилам обычной арифметики, возможна перестановка порядка суммирования. Реализуя ее, получаем:

$$e_s = \sum_{k=1}^{n} b_{ks} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{mk} e_m \right) = \sum_{m=1}^{n} e_m \left(\sum_{k=1}^{n} c_{mk} b_{ks} \right).$$

Сравнивая выражения слева и справа, и используя единственность координат вектора (т.е.коэффициентов при e_m в левой и правой частях), получаем:

$$\sum_{k=1}^{n} c_{mk} b_{ks} = \delta_{ms}, \tag{48}$$

где δ-символ Кронекера определен согласно соотношению: $\delta_{ms} = 0$, если $m \neq s$, $\delta_{ms} = 1$, если $m = s$. В левой части соотношения (48) нетрудно опознать матричное умножение матриц C^T и B^T. В правой части стоят элементы единичной матрицы E, которая на диагонали имеет единицы, а остальные элементы ее равны нулю. Таким образом, мы получили равенство:

$$C^T B^T = E. \tag{49}$$

Транспонируя это равенство, находим: $BC = E$. Согласно свойствам определителей, имеем:

$$det(B) det(C) = det(E) = 1.$$

таким образом, матрицы B, C невырождены и обратны друг другу.

Задачи

1. Доказать, что каждая из двух заданных систем векторов является базисом. Найти матрицу перехода от одной системы к другой.

$$a_1 = (1, 2, 1), \quad a_2 = (2, 3, 3), \quad a_3 = (3, 8, 2),$$

$$b_1 = (3, 5, 8), \quad b_2 = (5, 14, 13), \quad b_3 = (1, 9, 2).$$

2. Как изменится матрица перехода от одного базиса к другому, если поменять местами два вектора второго базиса?

5.5 Последовательные замены базиса

Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ введены базисы $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$, $\{g_1, g_2, ..., g_n\}$. Тогда можно ввести матрицу C перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$ и матрицу D перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{g\}$, так что выполняются соотношения

$$f_k = \sum_{m=1}^{n} c_{mk} e_m, k = 1, 2, ..., n.$$

$$g_s = \sum_{k=1}^{n} d_{ks} f_k, s = 1, 2, ..., n,$$

Подставляя первые соотношения во вторые, получаем:

$$g_s = \sum_{k=1}^{n} d_{ks} f_k = \sum_{k=1}^{n} d_{ks} \left(\sum_{m=1}^{n} c_{mk} e_m \right) = \sum_{m=1}^{n} e_m \left(\sum_{k=1}^{n} c_{mk} d_{ks} \right), s = 1, 2, ..., n,$$

Таким образом, матрица B перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{g\}$ имеет вид:

$$b_{ms} = \sum_{k=1}^{n} c_{mk} d_{ks}, 1 \leq m, s \leq n.$$

С помощью матричного умножения это соотношение можно записать в виде $B^T = C^T D^T$, или, транспонируя, $B = DC$.

5.6 Преобразование координат вектора при замене базиса

Пусть вектор X принадлежит векторному пространству $\mathfrak{L}$, выберем в этом пространстве какой-нибудь базис $\{e\}$. Согласно определению базиса, вектор X можно представить в виде линейной комбинации векторов базиса, и коэффициенты этого представления,

$$X = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m e_m, \tag{50}$$

числа $\lambda_m, m = 1, 2, ..., n$ - координаты вектора X в базисе $\{e\}$. Если в векторном пространстве ввести новый базис $\{f\}$, то вектор X можно представить и иным способом,

$$X = \sum_{k=1}^{n} \xi_k f_k, \tag{51}$$

числа $\xi_k, k = 1, 2, ..., n$ - координаты вектора X в новом базисе. Возникает естественный вопрос: как связаны между собой координаты вектора в старом и новом базисе?

Пусть A -матрица перехода от базиса $\{f\}$ к базису $\{e\}$,

$$e_m = \sum_{k=1}^{n} a_{km} f_k, m = 1, 2, ..., n. \tag{52}$$

Подставляя (52) в (50), получаем:

$$X = \sum_{m=1}^{n} \lambda_m \left(\sum_{k=1}^{n} a_{km} f_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{m=1}^{n} a_{km} \lambda_m \right) f_k. \tag{53}$$

Координаты вектора в базисе определяются однозначно, так что сравнивая (51) и (53), получаем:

$$\xi_k = \sum_{m=1}^{n} a_{km} \lambda_m, k = 1, 2, ..., n. \tag{54}$$

Если все координаты вектора X собрать в $n-$столбец, $\Xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)^T$, $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)^T$, то (54) в матричных обозначениях принимает вид:

$$\Xi = A^T \Lambda.$$

Если матрица C описывает переход от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$, то мы имеем $A = C^{-1}$, так что в итоге получаем:

$$\Xi = (C^T)^{-1} \Lambda.$$

Это и есть искомое соотношение, выражающее связь координат одного вектора в разных базисах.

Задачи

1. Даны вектора $a_1 = (-2, 1, 7)$, $a_2 = (3, -3, 8)$, $a_3 = (5, 4, -1)$, $c = (18, 25, 1)$. Доказать, что вектора a_1, a_2, a_3 составляют базис и разложить вектор c по базису векторов a_1, a_2, a_3.

2. Даны вектора $a_1 = (1, 2, -1, -2)$, $a_2 = (2, 3, 0, -1)$, $a_3 = (1, 2, 1, 4)$, $a_4 = (1, 3, -1, 0)$, $c = (7, 14, -1, 2)$. Доказать, что вектора a_1, a_2, a_3, a_4 составляют базис и разложить вектор c по базису векторов a_1, a_2, a_3, a_4.

5.7 Подпространства

Определение. Пусть L - подмножество векторного пространства $\mathfrak{L}$, обладающее следующими свойствами: для любых $u_1, u_2 \in \mathfrak{L}$ и любых чисел c_1, c_2 линейная комбинация $c_1 u_1 + c_2 u_2 \in \mathfrak{L}$. Такое подмножество называется **подпространством** $\mathfrak{L}$.

Пример. Подмножество $\mathfrak{L}$, состоящее из одного нулевого элемента, является подространством $\mathfrak{L}$. Само $\mathfrak{L}$ также является своим подпространством. Эти подпространства называются **тривиальными**.

Одним из естественных способов построения подпространств является линейная оболочка некоторого набора векторов.

Определение. Пусть $u_1, u_2, ..., u_k \in \mathfrak{L}$ - некоторый набор векторов. Рассмотрим множество их линейных комбинаций - векторов, представимых в виде $\sum_{s=1}^{k} c_s u_s$ для некоторых чисел $c_1, c_2, ..., c_k$. Это множество называется **линейной оболочкой** векторов $u_1, u_2, ..., u_k$.

Утверждение. Линейная оболочка векторов является подпространством $\mathfrak{L}$.

Контрольный вопрос. Докажите это утверждение.

Непосредственно из наших определений следует, что подпространство само является векторным пространством.

Задачи.

1. Докажите, что объединение двух подпространств L_1, L_2 является подпространством тогда и только тогда, когда либо $L_1 \in L_2$, либо $L_2 \in L_1$.

2. Докажите, что пересечение двух подпространств является подпространством.

3. Найти базис и размерность линейной оболочки следующего набора векторов:

$$a_1 = (1, 0, 0, -1), a_2 = (2, 1, 1, 0), a_3 = (1, 1, 1, 1), a_4 = (1, 2, 3, 4), a_5 = (0, 1, 2, 3).$$

6 Линейные операторы

6.1 Основные определения

Определение. Пусть $\mathfrak{L}$ - векторное пространство. Функция $A : \mathfrak{L} \to \mathfrak{L}$ называется **оператором**, действующим в векторном пространстве $\mathfrak{L}$.

Определение. Оператор A называется линейным, если для любых $u_1, u_2 \in \mathfrak{L}$ и любых чисел c_1, c_2 выполняется: $A(c_1 u_1 + c_2 u_2) = c_1 A(u_1) + c_2 A(u_2)$.

Обозначение. Результат действия линейного оператора A на вектор u обозначают Au, опуская скобки.

Примеры.

1. $Au = 0$ - оператор, который любому вектору ставит в соответствие нулевой вектор.

2. $Au = u$ - тождественный оператор.

3. $Au = \lambda \cdot u$ - оператор, который каждый вектор растягивает в λ раз.

4. Пусть в векторном пространстве фиксирован базис $e_1, e_2, ..., e_n$, так что любой вектор u представим в виде линейной комбинации

$$u = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k.$$

Возьмем B, произвольную квадратную матрицу порядка n. С ее помощью можно построить линейный оператор следующим образом. Положим

$$\xi_m = \sum_{k=1}^{n} B_{mk} \zeta_k,$$

и положим $v = \sum_{m=1}^{n} \xi_m e_m$. Таким образом, мы вектору u поставили в соответствие вектор v, т.е. задали оператор, действующий на векторном пространстве. Можно проверить, что этот оператор является линейным. Отметим при этом, что если выбирать разные базисы, то при заданной матрице B мы получим разные линейные операторы.

Для линейных операторов можно ввести естественные операции.

1. Пусть даны два линейных оператора A и B. Построим новый линейный оператор согласно соотношению: $u \to Au + Bu$. Нетрудно проверить, что это новое отображение само является линейным оператором. Его обозначают $A + B$.

2. Пусть A - линейный оператор, λ - некоторое число. Построим новый линейный оператор согласно соотношению: $u \to \lambda \cdot Au$. Нетрудно проверить, что это новое отображение само является линейным оператором. Его обозначают λA.

Итак, на множестве всех линейных операторов, действующих в векторном пространстве $\mathfrak{L}$, мы ввели две операции - сложение линейных операторов и умножение линейного оператора на число. Нулевой линейный оператор - оператор, ставящий в соответствие любому вектору нулевой вектор. Можно проверить, что при этом множество всех линейных операторов само становится векторным пространством.

6.2 Матричная форма линейного оператора

Более детальное рассмотрение показывает, что последний пример в некотором смысле является общим. А именно, пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ фиксирован базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Рассмотрим вектора $Ae_k, k = 1, 2, ..., n$. Эти вектора можно разложить по базису, так что мы имеем:

$$Ae_k = \sum_{m=1}^{n} \alpha_{mk} e_m \tag{55}$$

для некоторых чисел $\alpha_{mk}, m, k = 1, 2, ..., n$. Таким образом, появляется матрица α.

Определение . Матрица α, определяемая соотношением (55), называется **матричной формой оператора** A, соответствующей базису $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$.

Замечание . Как следует из определения (55), $k-$ый столбец матрицы α - это разложение вектора Ae_k по базису векторов $\{e\}$.

Пусть $u = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k$ и вычислим Au:

$$Au = A\left(\sum_{k=1}^{n} \zeta_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k A e_k = \sum_{k=1}^{n} \zeta_k \left(\sum_{m=1}^{n} \alpha_{mk} e_m\right) = \sum_{m=1}^{n} e_m \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk} \zeta_k\right)$$

Таким образом, мы вычислили координаты вектора Au в базисе $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Если эти координаты обозначить ξ_m, $m = 1, 2, ..., n$, то последнее соотношение можно записать в виде:

$$\xi_m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{mk}\zeta_k.$$

Это совпадает с формулами последнего примера. Этот факт означает следующее. Если в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ фиксирован базис, любой линейный оператор (в частности, описание его действия на вектора) можно свести к рассмотрению его матричной формы - иными словами, можно работать с матрицами вместо линейных операторов.

6.3 Преобразование матричной формы оператора при замене базиса

Из самого определения матричной формы линейного оператора следует, что она зависит от выбора базиса. Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ заданы линейный оператор A и два базиса, $\{e\}$ и $\{f\}$, так что

$$Ae_k = \sum_{r=1}^{n} \alpha_{rk} e_r, \quad k = 1, 2, ..., n, \tag{56}$$

$$Af_m = \sum_{s=1}^{n} \beta_{sm} f_s, \quad m = 1, 2, ..., n, \tag{57}$$

$$f_t = \sum_{p=1}^{n} c_{pt} e_p, \quad t = 1, 2, ..., n. \tag{58}$$

Здесь в правой части (56) определена матричная форма оператора A, соответствующая базису $\{e\}$, в правой части (57) - определена матричная форма оператора A, соответствующая базису $\{f\}$, в правой части (58) - матрица перехода от базиса $\{e\}$ к базису $\{f\}$. Наша задача - установить связь между матрицами α и β. Для этого мы подставляем (58) в правую и левую части (57). В левой части имеем:

$$Af_m = A\left(\sum_{p=1}^{n} c_{pm} e_p\right) = \sum_{p=1}^{n} c_{pm}\left(Ae_p\right) = \sum_{p=1}^{n} c_{pm}\left(\sum_{r=1}^{n} \alpha_{rp} e_r\right) =$$

$$\sum_{r=1}^{n} e_r \left(\sum_{p=1}^{n} \alpha_{rp} c_{pm}\right).$$

В правой части:

$$\sum_{s=1}^{n} \beta_{sm} f_s = \sum_{s=1}^{n} \beta_{sm}\left(\sum_{r=1}^{n} c_{rs} e_r\right) = \sum_{r=1}^{n} e_r \left(\sum_{s=1}^{n} c_{rs}\beta_{sm}\right).$$

Разложение вектора по базису однозначно, так что, сравнивая результаты, получаем:

$$\sum_{p=1}^{n} \alpha_{rp} c_{pm} = \sum_{s=1}^{n} c_{rs}\beta_{sm}, \quad r, m = 1, 2, ..., n.$$

В этих формулах можно опознать результат матричного умножения, так что в матричном виде имеем:

$$\alpha C^T = C^T \beta,$$

или, в окончательном виде,
$$\beta = (C^T)^{-1}\alpha C^T.$$
Эта формула связывает матричные формы линейного оператора, соответствующие различным базисам векторного пространства.

Задачи.

1. Даны два линейных преобразования

$$\begin{cases} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3, \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3, \\ y_3 = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + b_{13}y_3, \\ z_2 = b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + b_{23}y_3, \\ z_3 = b_{31}y_1 + b_{32}y_2 + b_{33}y_3. \end{cases}$$

Средствами матричного исчисления найти преобразование, выражающее z_1, z_2, z_3 через x_1, x_2, x_3.

а)
$$\begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3, \\ y_2 = -3x_2 + x_3, \\ y_3 = 2x_1 + 3x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = 3y_1 + y_2, \\ z_2 = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ z_3 = 3y_1 + 2y_3. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} y_1 = 2x_2, \\ y_2 = -2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_3 = 4x_1 - x_2 + 5x_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = -3y_1 + y_3, \\ z_2 = 2y_2 + y_3, \\ z_3 = -y_2 + 3y_3. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} y_1 = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ y_2 = -2x_1 + x_2 - x_3, \\ y_3 = 3x_1 + x_2 + x_3, , \end{cases} \qquad \begin{cases} z_1 = y_1 - 2y_2 - y_3, \\ z_2 = 3y_1 + y_2 + 2y_3, \\ z_3 = y_1 + 2y_2 + 2y_3. \end{cases}$$

6.4 Собственные вектора и собственные значения линейного оператора

6.4.1 Определение

Самый простой линейный оператор - умножение вектора на число λ. Этот оператор просто растягивает все вектора в λ раз. Его матричная форма в любом базисе - $diag(\lambda, \lambda, ..., \lambda)$. Фиксируем для определенности базис $\{e\}$ в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ и рассмотрим линейный оператор с диагональной матричной формой в этом базисе, $\alpha = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Этот оператор, согласно определению матричной формы, растягивает e_k в λ_k раз, т.е. $Ae_k = \lambda_k e_k$ для всех $k = 1, 2, ..., n$. С диагональными матрицами удобно работать, для них просто строится функциональное исчисление: для любой функции $f(x)$ можно положить $f(diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)) = diag(f(\lambda_1), f(\lambda_2), ..., f(\lambda_n))$. Таким образом возникает естественный вопрос: пусть имеется линейный оператор A, можно ли выбрать такой базис в векторном пространстве, чтобы матричная форма оператора A была диагональной в этом базисе? Этот вопрос приводит к определению собственных чисел и собственных векторов.

Определение . Пусть для линейного оператора A существует ненулевой вектор u и число λ такие, что
$$Au = \lambda \cdot u. \tag{59}$$

Тогда вектор u называют **собственным вектором** оператора A, а число λ - соответствующим **собственным числом** оператора A. Совокупность всех собственных чисел называют **спектром линейного оператора** A.

Возникает естественная ***задача*** : найти для заданного линейного оператора его собственные числа и соответствующие собственные вектора. Эту задачу называют задачей о спектре линейного оператора.

6.4.2 Уравнение для собственных значений

Фиксируем для определенности базис в векторном пространстве, т.е. будем считать, что он раз и навсегда задан. Тогда, как обсуждалось выше, рассмотрение линейных операторов можно свести к рассмотрению матриц - матричных форм линейных операторов. Уравнение (59) перепишем в виде

$$(\alpha - \lambda E)u = 0.$$

Здесь E - единичная матрица, а α - матричная форма нашего линейного оператора A. Это соотношение можно трактовать как систему n линейных уравнений для n неизвестных - координат вектора u. Причем это однородная система уравнений, и нам следует найти ее ***нетривиальное*** решение. Ранее было приведено условие существования такого решения - для этого необходимо и достаточно, чтобы ранг системы был меньше числа неизвестных. Отсюда следует уравнение для собственных чисел:

$$det(\alpha - \lambda E) = 0. \tag{60}$$

Определение . Уравнение (60) называется **характеристическим уравнением**для линейного оператора A.

Опишем свойства этого уравнения и его решений. Если его выписывать в явном виде, получим уравнение вида

$$(-1)^n \lambda^n + ... + det(A) = 0. \tag{61}$$

В левой части стоит полином по переменной λ. Такие уравнения называются алгебраическими степени n. Приведем необходимые сведения об этих уравнениях.

Справка об алгебраических уравнениях .

Основная теорема алгебры . Уравнение (61) имеет решение на комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Следствие . Уравнение (61) имеет на комплексной плоскости столько решений, какова его степень (решения учитываются с учетом кратности).

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\lambda(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^3 = 0.$$

Это уравнение 6 степени. Оно имеет следующие решения: $\lambda = 0$, $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, причем кратность первого решения равна 1 (такие решения называют **простыми** корнями), кратность второго решения равна 2, кратность третьего решения равна 3. Решения, кратность которых выше 1, называют **кратными** . В нашем случае 1+2+3=6. Уравнения степени $n \geq 5$ невозможно решить с помощью радикалов (теорема Абеля-Руффини). Для уравнений степени $n = 2, 3, 4$ такие явные формулы существуют. Однако на практике уравнения высокой степени можно успешно решать с помощью компьютеров. Таким образом, в дальнейшем будем считать, что мы тем или иным способом построили решения уравнения (61).

6.4.3 Собственные вектора

Рассмотрим вопрос о построении собственного вектора, соответствующего известному собственному числу λ_k. Для этого обратимся к уравнению

$$(\alpha - \lambda_k E)u = 0.$$

Это уравнение можно понимать как систему линейных уравнений для координат вектора u - собственного вектора, соответствующего собственному числу λ_k. При этом данная система имеет нетривиальное решение, так как ранг этой системы меньше числа неизвестных. Решая эту систему методом Гаусса, можно определить координаты вектора u. Перебирая все значения λ_k, $k = 1, 2, ..., n$, находим соответствующие собственные вектора u_k.

Пример. Найдем собственные значения и собственные вектора линейного преобразования, заданного в некотором базисе следующей матрицей:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $A - \lambda E$ имеет в данном случае вид:

$$A - \lambda E = \begin{pmatrix} 5-\lambda & -7 & 0 \\ -3 & 1-\lambda & 0 \\ 12 & 6 & -3-\lambda \end{pmatrix}.$$

Вычисляем определитель $det(A - \lambda E)$ и выписываем уравнение на собственные значения:

$$det(A - \lambda E) = -(\lambda + 3)(\lambda^2 - 6\lambda - 16) = 0.$$

Отсюда находим 3 собственных значения: $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 8, \lambda_3 = -2$. Мы получили 3 собсвенных значения, все они имеют кратность 1, т.е. это простые собственные числа. Вычислим соответствующие собственные вектора.

1. Рассмотрим $\lambda_1 = -3$. Соответствующее уравнение для собственного вектора $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 8 & -7 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ 12 & 6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0,$$

где справа стоит нулевой 3-вектор. Эта система уравнений для 3 неизвестных имеет следующее решение: $u = (0, 0, 1)^T$.

2. Рассмотрим $\lambda_2 = 8$. Соответствующее уравнение для собственного вектора $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} -3 & -7 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 12 & 6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0,$$

где справа стоит нулевой 3-вектор. Эта однородная система уравнений для неизвестных u_1, u_2, u_3 имеет решение: $u = (7, -3, 0)^T$.

3. Рассмотрим $\lambda_3 = -2$. Соответствующее уравнение для собственного вектора $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 7 & -7 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \\ 12 & 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = 0,$$

где справа стоит нулевой 3-вектор. Эта однородная система уравнений для неизвестных u_1, u_2, u_3 имеет решение: $u = (1, 1, 0)^T$.

6.4.4 Свойства собственных векторов

Теорема. Пусть все собственные числа линейного оператора A - простые. Тогда набор собственных векторов, соответствующих этим собственным числам, образует базис векторного пространства.

Доказательство. Из условий теоремы следует, что все собственные числа оператора A различны. Предположим, что набор собственных векторов линейно зависим, так что существуют константы $c_1, c_2, ..., c_n$, не все из которых нули, удовлетворяющие условию:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k u_k = 0. \tag{62}$$

Рассмотрим среди таких формул такую, которая включает минимальное число слагаемых, и подействуем на нее оператором A. В силу его линейности получаем:

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} c_k u_k\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k A u_k = \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda_k u_k = 0. \tag{63}$$

Пусть, для определенности, $c_1 \neq 0$. Умножая (62) на λ_1 и вычитая из (63), получим соотношение вида (62), но содержащее на одно слагаемое меньше. Противоречие доказывает теорему.

Итак, в условиях теоремы появляется базис, связанный с данным линейным оператором - базис его собственных векторов. Рассмотрим матричную форму оператора в таком базисе. Как упоминалось выше, k-ый столбец этой матрицы - это разложение вектора Au_k по базису. Однако по определению $Au_k = \lambda_k u_k$, так что это разложение (то, что выписано в правой части) содержит только одно слагаемое и построенная матрица оказывается диагональной. В итоге получаем, что в условиях теоремы матричная форма оператора в базисе его собственных векторов равна $diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$. Поэтому если необходимо развивать функциональное исчисление для линейного оператора разумно работать в базисе его собственных векторов.

Если же среди собственных чисел линейного оператора есть кратные, описание ситуации становится сложнее и может включать так называемые жордановы клетки. Мы отошлем читателя к более продвинутым руководствам для изучения соответствующих ситуаций.

Задачи.

Найти собственные числа и собственные вектора линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей A.

1.
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

2.
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{pmatrix}.$$

3.
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

4.
$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

7 Скалярное произведение и евклидовы пространства

7.1 Скалярное произведение

7.1.1 Определение и основные свойства скалярного произведения

Мы рассматриваем векторное пространство $\mathfrak{L}$.

Определение. Предположим, что существует числовая функция, которая сопоставляет паре векторов $x, y \in \mathfrak{L}$ число (его обозначают (x, y)), причем эта функция имеет следующие свойства. Для любых векторов $x, y, z \in \mathfrak{L}$ и любого числа λ

1. $(x, y) = (y, x)$,
2. $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$,
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$,
4. $(x, x) \geq 0$, причем $(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Тогда говорят, что на векторном пространстве $\mathfrak{L}$ задано **скалярное произведение**, и векторное пространство $\mathfrak{L}$ называют **евклидовым**.

Первое свойство означает симметричность скалярного произведения по сомножителям, из него следует, что оба сомножителя равноправны и скалярное произведение обладает одинаковыми свойствами относительно обоих сомножителей.

Наличие в векторном пространстве скалярного произведения позволяет ввести в векторном пространстве ряд геометрических понятий и объектов, знакомых в "стандартной"трехмерной геометрии. К ним относится длина вектора, угол между векторами, проекция вектора на направление (ось) и т.д.

Стандартное скалярное произведение. Рассмотрим векторное пространство $\mathfrak{L}$ - пространство n-столбцов $u = (u_1, u_2, ..., u_n)^T$. Тогда скалярное произведение для двух таких столбцов можно определить следующим образом:

$$(u, v) = u_1 v_1 + u_2 v_2 + ... + u_n v_n.$$

Такое скалярное произведение довольно часто употребляется по умолчанию (т.е. если явным образом не введено другое скалярное произведение).

Контрольный вопрос. Покажите, что стандартное скалярное произведение обладает всеми перечисленными выше свойствами.

7.1.2 Неравенство Коши-Буняковского

Пусть в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ определено скалярное произведение. Тогда из свойств скалярного произведения вытекает следующее неравенство, справедливое для произвольных векторов $u, v \in \mathfrak{L}$:

$$|(u, v)|^2 \leq (u, u) \cdot (v, v), \tag{64}$$

которое называется **неравенством Коши-Буняковского**.

Доказательство. Возьмем произвольное число λ и запишем для линейной комбинации $w = u + \lambda v$ соотношение $(w, w) \geq 0$:

$$(w, w) = (u + \lambda v, u + \lambda v) = (u, u) + \lambda \cdot ((u, v) + (v, u)) + \lambda^2 \cdot (v, v)$$

$$= (u, u) + 2\lambda \cdot (u, v) + \lambda^2 \cdot (v, v) \geq 0.$$

Здесь при раскрытии скобок мы использовали свойства скалярного произведения. Таким образом, наше выражение можно рассматривать как квадратный трехчлен, причем не принимающий отрицательное значепние ни при каких λ. Это означает, что дискриминант этого трехчлена неположителен:

$$D = 4(v, u)^2 - 4(v, v)(u, u) \leq 0.$$

Это неравенство эквивалентно неравенству (64).

7.1.3 Длина вектора, углы между векторами, неравенство треугольника

Наличие скалярного произведения позволяет ввести **длину вектора** u согласно соотношению:

$$|u| = \sqrt{(u, u)}.$$

При этом неравенство Коши-Буняковского можно переписать в виде

$$|(u, v)| \leq |u| \cdot |v|.$$

Последнее неравенство позволяет определить **угол между векторами**. Мы полагаем угол α между векторами $u, v \in \mathfrak{L}$ определенным согласно соотношению

$$\cos\alpha = \frac{(u, v)}{|u| \cdot |v|}.$$

Правая часть этого соотношения не превосходит по модулю 1, так что для любой пары векторов угол между ними определен.

Определение. Вектора u, v называются **ортогональными**, если $(u, v) = 0$ (так что, согласно предыдущему определению, угол между ними равен $\pi/2$).

Далее, из неравенства Коши-Буняковского следует так называемое неравенство треугольника: для любых двух векторов $u, v \in \mathfrak{L}$ выполняется:

$$|u + v| \leq |u| + |v|.$$

Доказательство. Выпишем

$$|u + v|^2 = (u + v, u + v) = (u, u) + 2(u, v) + (v, v) \leq |u|^2 + 2|u||v| + |v|^2.$$

Извлекая корень, получаем неравенство треугольника.

7.1.4 Проекция вектора на ось

Скалярное произведение позволяет ввести еще один объект, имеющий приложения в геометрии. Пусть $e \in \mathfrak{L}$ - вектор единичной длины, $|e| = 1$.

Определение. Проекцией произвольного вектора $u \in \mathfrak{L}$ на вектор e называется вектор $(u, e)e$. Его иногда называют также **проекцией вектора** u на ось (имея в виду, что направление оси фиксируется вектором e).

Из этого определения следует, что вектор $v = u - (u, e)e$ ортогонален вектору e: $(v, e) = (v, u - (u, e)e) = (v, u) - (v, u)(e, e) = 0$.

Задачи.

1. Найти скалярное произведение векторов, заданных своими координатами.

а) $u(4,-1)$, $v(-1,7)$.

б) $u(2,1)$, $v(1,-37)$.

в) $u(1,0,3)$, $v(-4,15,1)$.

г) $u(2,1,1)$, $v(-1,7,9)$.

2. Найти угол между векторами, заданными своими координатами.

а) $u(1,-1,1)$, $v(5,1,1)$.

б) $u(1,-1,1)$, $v(2,-2,2)$.

3. Даны вектора $a=(3;1;2)$, $b=(2;7;4)$, $c=(5;-8;10)$. Вычислить вектор $(a,b)c$.

4. Вершины четырехугольника $A(2;-3;1)$, $B(-1;1;1)$, $C(-4;5;6)$, $D(2;-3;6)$. Вычислить косинусы его углов.

5. Вычислить внутренний угол при вершине B у треугольника $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$.

6. Вычислить угол между диагоналями четырехугольника

а) $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$, $D(-5;-5;3)$.

б) $A(-4;-4;4)$, $B(-3;2;3)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;2)$.

7. Даны вектора $a(2;-1;3)$, $b(1;-3;2)$, $c(3;2;-4)$. Вычислить вектор x из условий $(x,a)=10$, $(x,b)=22$, $(x,c)=-40$.

8. Найти единичный вектор, перпендикулярный векторам $a=3i-j+2k$, $b=-i+3j-k$.

9. Найти вектор x, перпендикулярный векторам $a=(2;3;-1)$, $b=(1;-2;3)$ при условии, что $(x,c)=-6$, где $c=(2;-1;1)$.

10. Даны два вектора $a(3;-1;5)$, $b(1;2;-3)$. Найти вектор x, перпендикулярный оси OZ и удовлетворяющий условиям $(x,a)=9$, $(x,b)=-4$.

7.2 Евклидовы векторные пространства

Определение. Векторное пространство $\mathfrak{L}$ называется **евклидовым**, если в этом векторном пространстве задано скалярное произведение.

Как было показано в предыдущем разделе, наличие скалярного произведения позволяет ввести длину вектора, угол между векторами, понятие проекции вектора на ось, понятие ортогональности векторов. Приведем несколько свойств ортогональных векторов.

Лемма. Если в наборе векторов $\{u_1,\ u_2,\ ...,u_k\}$ все вектора ненулевые и ортогональны друг другу, то они линейно независимы.

Доказательство. Предположим, что они линейно зависимы, так что существуют константы $\lambda_1,\ \lambda_2,...,\lambda_k$, не все равные нулю, такие, что

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+...+\lambda_k u_k=0.$$

Пусть $\lambda_1\neq 0$. Рассмотрим скалярное произведение этой суммы с вектором u_1, получим, в силу наших условий и линейности скалярного произведения по сомножителям, равенство $\lambda_1(u_1,u_1)=0$. Отсюда заключаем, используя свойства скалярного произведения, что $u_1=0$. Пришли к противоречию. ч.т.д.

Лемма (теорема Пифагора). Если $u=u_1+u_2+...+u_k$, причем все вектора $u_1,\ u_2,...,u_k$ попарно ортогональны, то

$$|u|^2=|u_1|^2+|u_2|^2+...+|u_k|^2.$$

Доказательство. Умножим скалярно вектор u сам на себя, получим:

$$|u|^2=(u,u)=(u_1+u_2+...+u_k,u_1+u_2+...+u_k).$$

Раскрываем скобки, используя линейность скалярного произведения по сомножителям,

$$|u|^2 = (u_1, u_1) + (u_1, u_2) + ...(u_1, u_k) + (u_2, u_1) + (u_2, u_2) + (u_2, u_3) + ... + (u_k, u_k).$$

Все произведения с неравными сомножителями пропадут (в силу попарной ортогональности векторов), так что в итоге:

$$|u|^2 = (u_1, u_1) + (u_2, u_2) + ... + (u_k, u_k) = |u_1|^2 + |u_2|^2 + ... + |u_k|^2.$$

ч.т.д.

Предложение. В конечномерном векторном пространстве можно задать скалярное произведение.

Из этого предложения следует, что любое конечномерное векторное пространство можно, после введения скалярного произведения, рассматривать как евклидово пространство.

Теорема. В конечно-мерном евклидовом пространстве существует базис из взаимноортогональных векторов единичной длины (ортонормированный базис).

Пусть $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ - ортонормированный базис конечномерного евклидова пространства $\mathfrak{L}$, так что вектора этого базиса попарно ортогональны и имеют единичную длину. Возьмем произвольный вектор $u \in \mathfrak{L}$, и напишем его разложение по базису $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$,

$$u = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_m.$$

Умножим скалярно этот вектор на базисный вектор e_p, получим

$$(u, e_p) = (\sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_m, e_p) = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m (e_m, e_p) = \lambda_p (e_p, e_p) = \lambda_p.$$

Таким образом, для коэффициентов разложения λ_p, $p = 1, 2, ..., k$, координат вектора u в базисе $\{e\}$, находим простую формулу:

$$\lambda_p = (u, e_p). \tag{65}$$

Далее, вычислим длину вектора u:

$$|u|^2 = (\sum_{m=1}^{k} \lambda_m e_m, \sum_{s=1}^{k} \lambda_s e_s) = \sum_{m=1}^{k} \sum_{s=1}^{k} \lambda_m \lambda_s (e_m, e_s)$$

(здесь мы использовали линейность скалярного произведения по обоим сомножителям). Произведения (e_m, e_s) отличны от нуля лишь тогда, когда $m = s$, причем в этом случае они равны 1. Таким образом,

$$|u|^2 = \sum_{m=1}^{k} \lambda_m^2. \tag{66}$$

Соотношения (65) и (66) следуют из ортонормированности базиса $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$, они существенно упрощают работу с векторами по сравнению с разложениями векторов по базисам, которые не обладают ортонормированностью.

Задачи.

1. Доказать, что скалярное произведение двух любых векторов $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$, $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ евклидова пространства тогда и только тогда можно записать в виде

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_n y_n,$$

когда базис, в котором вычислены координаты векторов, является ортонормированным.

2. Проверить, что вектора ортогональны и дополнить этот набор до ортогонального базиса пространства. $X_1 = (1, -2, 2, -3)$, $X_2 = (2, -3, 2, 4)$.

3. Найти вектора, дополняющие следующую систему векторов до ортонормированного базиса: $X_1 = (2/3, 1/3, 2/3)$, $X_2 = (1/3, 2/3, -2/3)$.

8 Симметричные операторы

Определение. Линейный оператор A, действующий в евклидовом векторном пространстве $\mathfrak{L}$, называется **симметричным**, если для любых векторов $x, y \in \mathfrak{L}$ выполняется соотношение $(Ax, y) = (x, Ay)$.

Как упоминалось выше, при обсуждении матричной формы линейного оператора, если фиксирован базис в векторном пространстве рассмотрение линейного оператора можно заменить рассмотрением матрицы - его матричной формы. Пусть этот базис $\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ будет ортонормированным, α_{rt} - матричная форма оператора A. Тогда

$$(Ae_s, e_p) = (\sum_{r=1}^{k} \alpha_{rs} e_r, e_p) = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{rs}(e_r, e_p) = \alpha_{ps},$$

$$(e_s, Ae_p) = (e_s, \sum_{r=1}^{k} \alpha_{rp} e_r) = \sum_{r=1}^{k} \alpha_{rp}(e_s, e_r) = \alpha_{sp}.$$

Таким образом, матричная форма симметричного оператора представляется **симметричной** матрицей - матрицей α, удовлетворяющей условию $\alpha = \alpha^T$. Можно проверить и обратное - если матричная форма является симметричной матрицей, то соответствующий линейный оператор является симметричным. Симметричные операторы играют важную роль в естествознании (особенно в физике), так что этот класс операторов заслуживает отдельного обсуждения.

Теорема. Пусть α - вещественная симметричная матрица. Тогда ее собственные значения вещественны.

Доказательство. Пусть λ - собственное число матрицы α, причем $\lambda \neq \overline{\lambda}$ (т.е. λ - не вещественна). Тогда для соответствующего собственного вектора u имеем:

$$\alpha u = \lambda \cdot u, \quad \overline{\alpha u} = \overline{\lambda u} = \overline{\lambda} \cdot \overline{u}, \quad \overline{\alpha u} = \alpha \cdot \overline{u}.$$

Сравнивая эти соотношения, получаем: число $\overline{\lambda}$ является собственным числом матрицы α, $\overline{u}$ - соответствующий собственный вектор. Вычислим $(\alpha u, \overline{u})$ двумя способами. Во-первых, $(\alpha u, \overline{u}) = (\lambda u, \overline{u}) = \lambda(u, \overline{u})$. Перебрасывая матрицу на второй сомножитель, получаем: $(\alpha u, \overline{u}) = (u, \alpha\overline{u}) = (u, \overline{\lambda}\overline{u}) = \overline{\lambda}(u, \overline{u})$. При этом $(u, \overline{u}) = \overline{(u, \overline{u})}$ - вещественная величина, отличная от 0. Отсюда следует, что $\lambda = \overline{\lambda}$.

Теорема. Собственные вектора, соответствующие различным собственным числам симметричной матрицы, ортогональны друг другу.

Доказательство. Пусть $\alpha u_1 = \lambda_1 u_1$, $\alpha u_2 = \lambda_2 u_2$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, α - симметричный оператор. Вычислим $(\alpha u_1, u_2)$ двумя способами. Во-первых, $(\alpha u_1, u_2) = \lambda_1(u_1, u_2)$. Во-вторых, $(\alpha u_1, u_2) = (u_1, \alpha u_2) = \lambda_2(u_1, u_2)$. Сравнивая, получаем: $(\lambda_1 - \lambda_2)(u_1, u_2) = 0$, откуда $(u_1, u_2) = 0$.

Более продвинутое рассмотрение приводит к следующему результату.

Теорема. Собственные вектора симметричной матрицы попарно ортогональны друг другу.

Таким образом, набор собственных векторов симметричной матрицы образуют ортогональный базис, а если ветора базиса привести к единичной длине - ортонормированный базис.

9 Квадратичные формы

9.1 Основные определения

Определение. Пусть $\mathfrak{L}$ - конечномерное векторное пространство. Числовая вещественнозначная функция $A(x, y)$, аргументами которой являются вектора $x, y \in \mathfrak{L}$, называется билинейной функцией (**билинейной формой**), если она линейна по x при каждом фиксированном y и линейна по y при каждом фиксированном x. Линейность по x означает, что для любых чисел λ_1, λ_2 выполняется

$$A(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y) = \lambda_1 A(x_1, y) + \lambda_2 A(x_2, y).$$

Выберем базис в пространстве $\mathfrak{L}$, вектора $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и разложим вектора x, y по этому базису,

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k.$$

Тогда, используя билинейность формы, получаем:

$$A(x, y) = A(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k, \sum_{m=1}^{n} y_m e_m) = \sum_{k,m=1}^{n} x_k y_m A(e_k, e_m) = \sum_{k,m=1}^{n} \alpha_{km} x_k y_m,$$

где матрица α_{km} определяется соотношением $\alpha_{km} = A(e_k, e_m)$. Разумеется, она зависит от выбора базиса.

Определение. **Квадратичной формой** в векторном пространстве $\mathfrak{L}$ называется функция $A(x, x)$, которая получается из билинейной формы $A(x, y)$ при равенстве векторных аргументов $y = x$.

Подставляя $y = x$, получим:

$$A(x, x) = \sum_{k,m=1}^{n} \alpha_{km} x_k x_m. \tag{67}$$

Это соотношение приводит к эквивалентному определению квадратичной формы.

Определение. Однородный многочлен второй степени от переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ называется квадратичной формой. В явном виде

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \alpha_{11} x_1^2 + \alpha_{12} x_1 x_2 + ... + \alpha_{nn} x_n^2 = \sum_{k,m=1}^{n} \alpha_{km} x_k x_m.$$

При этом, не уменьшая общности, можно считать, что матрица α с элементами α_{km} - симметричная.

Контрольный вопрос. Почему предположение о симметричности матрицы α_{km} не уменьшает общности рассмотрений?

Введем вектор-столбец $X = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$. Тогда можно записать $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ в более сжатом виде $f(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T \alpha X$, имея в виду обычные обозначения для матричного умножения.

Итак, по билинейной форме можно построить квадратичную форму. В обратную сторону это соответствие обращается не совсем точно - по квадратичной форме можно восстановить "симметричную"часть билинейной формы (или саму билинейную форму, если она была симметричной, т.е. выполнялось равенство $A(x,y) = A(y,x)$ для всех $x, y \in \mathfrak{L}$). Это обращение реализуется с помощью формулы:

$$B(x,y) = \left[A(x+y, x+y) - A(x,x) - A(y,y)\right]/2 = \left[A(x,y) + A(y,x)\right]/2,$$

так что если $A(x,y)$ была симметричной, мы имеем: $A(x,y) = B(x,y)$.

9.2 Теорема о приведении квадратичной формы

Если матрица α диагональна, квадратичная форма (67) приобретает простой вид,

$$A(x,x) = \sum_{k,m=1}^{n} \beta_k x_k^2, \quad \beta_k = \alpha_{kk}. \tag{68}$$

Однако для недиагональной матрицы α в правой части (67) содержатся и перекрестные слагаемые. В то же время, как упоминалось выше, вид матрицы α зависит от выбора базиса. Возникает следующий вопрос. Пусть задана произвольная квадратичная форма. Можно ли заменой базиса привести ее к диагональному виду (68)?

Определение. Пусть для данной квадратичной формы $A(x,x)$ существует такой базис $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ со следующими свойствами: если представить вектор $x \in \mathfrak{L}$ в этом базисе,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k,$$

то для некоторого фиксированного (не зависящего от x) набора чисел $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$

$$A(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2. \tag{69}$$

Тогда базис $\{f_1, f_2, ..., f_n\}$ называется **каноническим базисом** формы $A(x,x)$, а представление (69) - **каноническим видом** квадратичной формы $A(x,x)$.

Теорема. Любую квадратичную форму можно привести к каноническому виду после перехода к соответствующему базису.

Доказательство. Заметим, что переход к новому базису эквивалентен линейной замене координат вида

$$x_k = \sum_{p=1}^{n} c_{kp} y_p$$

для подходящих чисел c_{kp} (это следует из формул замены координат вектора при замене базиса). Таким образом, мы будем использовать линейные замены координат вместо замен базиса.

Доказательство проведем по индукции, по размерности пространства n. Очевидно, при $n = 1$ теорема верна - квадратичная форма совпадает с функцией $A(x,x) = \mu x^2$. Предположим, что теорема верна для $n = N$ и докажем ее для $n = N + 1$. Выпишем нашу квадратичную форму, выделив слагаемые, содержащие x_1:

$$A(x,x) = \alpha_{11} x_1^2 + 2\alpha_{12} x_1 x_2 + ...2\alpha_{1n} x_1 x_n + g(x_2, x_3, ..., x_n), \tag{70}$$

где $g(x_2, x_3, ..., x_n)$ состоит из слагаемых, содержащих переменные x_2, $x_3, , x_n$. Если все коэффициенты α_{11}, $\alpha_{12}, ..., \alpha_{1n}$ равны 0, наша квадратичная форма зависит только от $n-1 = N$ переменных x_2, $x_3, ..., x_n$, так что для нее теорема верна по предположению индукции. Рассмотрим теперь вариант, когда не все эти коэффициенты равны 0.

1. $\alpha_{11} \neq 0$,

$$A(x,x) = \alpha_{11}\left(x_1^2 + \frac{2\alpha_{12}}{\alpha_{11}}x_1x_2 + ...\frac{2\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}x_1x_n\right) + g(x_2, x_3, ..., x_n).$$

Выделим полный квадрат такой заменой переменных:

$$y_1 = x_1 + \frac{\alpha_{12}}{\alpha_{11}}x_2 + ...\frac{\alpha_{1n}}{\alpha_{11}}x_n, \quad y_2 = x_2, \; ..., y_n = x_n.$$

Тогда в новых переменных

$$A(x,x) = \alpha_{11}y_1^2 + h(y_2, \, y_3, ..., y_n),$$

где $h(y_2, \, y_3, ..., y_n)$ - квадратичная форма от N переменных. Эту квадратичную форму можно привести линейной заменой переменных y_2, $y_3, ..., y_n$ (не трогая y_1) к диагональному виду по предположению индукции. Таким образом, и в этом случае доказательство заканчивается.

2. Пусть теперь $\alpha_{11} = 0$, но какой-то из коэффициентов α_{12}, $\alpha_{13}, ..., \alpha_{1n}$ не равен 0, пусть, для определенности, $\alpha_{12} \neq 0$. Положим

$$x_1 = y_1 + y_2, \; x_2 = y_1 - y_2, \; x_3 = y_3, \; ..., x_n = y_n.$$

Тогда соотношение (70) приобретает вид:

$$A(x,x) = 2\alpha_{12}(y_1^2 - y_2^2) + ...$$

Ненулевое слагаемое, содержащее y_1^2, только одно, выписанное явно. Таким образом, мы приходим к ситуации п.1 и заканчиваем доказательство. ч.т.д.

9.3 Закон инерции квадратичных форм

Итак, согласно теореме о приведении квадратичной формы, для любой квадратичной формы $A(x,x)$ существует канонический базис $\{f_1, \, f_2, ..., f_n\}$, так что для любого вектора x,

$$x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k, \quad A(x,x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2.$$

Так как $A(x,x)$ вещественно-значна, и наши замены базиса также включают только вещественные числа, приходим к выводу, что числа λ_k вещественны. Среди этих чисел есть положительные, отрицательные и равные нулю.

Определение. Число n_+ положительных чисел λ_k называется **положительным индексом квадратичной формы** $A(x,x)$, число n_- отрицательных чисел λ_k называется **отрицательным индексом квадратичной формы**, число $(n_+ + n_-)$ называется **рангом квадратичной формы**. Если $n_+ = n$, квадратичная форма называется **положительной**.

Вообще говоря, приведение квадратичной формы к диагональному виду реализуется не единственным образом. Возникает вопрос: зависят ли числа n_+, n_- от выбора базиса, в котором квадратичная форма диагональна?

Теорема (**закон инерции квадратичных форм**). Положительный и отрицательный индексы квадратичной формы не зависят от способа приведения ее к каноническому виду.

Доказательство. Пусть имеется два канонических базиса, $\{f\}$, $\{g\}$, так что любой вектор x представляется в виде:

$$x = \sum_{k=1}^{n} \eta_k f_k = \sum_{m=1}^{n} \zeta_m g_m,$$

причем

$$A(x, x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k^2 = \sum_{m=1}^{n} \mu_m \zeta_m^2. \tag{71}$$

Пусть среди λ_k первые p положительны, остальные либо отрицательны, либо нули, среди μ_m первые s положительны, остальные либо отрицательны, либо нулевые. Нам необходимо доказать, что $p = s$. Перепишем (71):

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \eta_k^2 - \sum_{m=s+1}^{n} \mu_m \zeta_m^2 = - \sum_{k=p+1}^{n} \lambda_k \eta_k^2 + \sum_{m=1}^{s} \mu_m \zeta_m^2, \tag{72}$$

так что все слагаемые в обеих частях равенства неотрицательны. Предположим, что p и s не равны, например, $p < s$. Поставим такую задачу: найти такой x, что $\eta_k = 0,\ k = 1, 2, .., p$, $\zeta_m = 0, m = s + 1,\ s + 2, ..., n$. При этом левая часть последнего равенства обращается в 0. Наши условия означают $p + n - s$ условий на вектор x, причем каждое условие выражается в линейном уравнении на координаты вектора x, в правой части которого 0. Итого имеем $p + n - s < n$ уравнений на вектор в n- мерном пространстве. Однородная система уравнений, которую мы получили, имеет n неизвестных (координат вектора x) и $p + n - s$ уравнений, так что согласно общим теоремам о системах уравнений имеется ненулевое решение, которому соответствует ненулевой вектор x. В левой части (72) имеем 0, в правой части присутствуют $\zeta_m, m = 1,\ 2, ..., s$ с ненулевыми положительными коэффицентами, остальные слагаемые в правой части тоже неотрицательны. Таким образом, получаем: $\zeta_m = 0, m = 1,\ 2, ..., s$. В итоге все $\zeta_m = 0, m = 1,\ 2, ..., n$, координаты вектора x в базисе $\{g\}$, равны нулю, так что x - нулевой вектор. Пришли к противоречию.

Мы доказали, что совпадают положительные индексы. Аналогично можно доказать, что совпадают и отрицательные индексы. ч.т.д.

Задачи.

1. Преобразовать к сумме квадратов квадратичные формы:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 5x_3^2$;

б) $x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$;

в) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;

г) $8x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 6yz + 4xz - 2xy$.

2. Найти те значения параметра λ, при котором следующие квадратичные формы являются положительными:

а) $5x_1^2 + x_2^2 + \lambda x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;

б) $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 + 2x_1x_3$.